8

FONCTION LOGARITHME DÉCIMAL

Résumé

La fonction logarithme décimal permet de résoudre des problèmes où la variable apparaît dans un exposant.
Elle est très utilisée en économie, en finance, en sciences ou encore pour les échelles logarithmiques.

1 Introduction

Exercice

On considère les nombres suivants :

$$10 \qquad 100 \qquad 1\,000 \qquad 10\,000$$

1. Écrire chacun de ces nombres sous la forme d'une puissance de 10.

2. Compléter le tableau suivant.

Nombre	Exposant de 10
10	
100	
1 000	
10 000	
100 000	

3. Déterminer l'exposant de 10 permettant d'obtenir :

a) 1 000 000

b) 0,1

c) 0,001

4. On cherche maintenant un nombre x tel que :

$$10^x = 50$$

a) Vérifier que :

$$10^1 < 50 < 10^2$$

b) Que peut-on en déduire sur la valeur de x ?

c) À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de x au dixième.

5. Même question avec $10^x = 500$.

Dans ce chapitre, le nombre permettant de résoudre une équation du type :

$$10^x = a$$

sera appelé le **logarithme décimal** de a.

2 Logarithme décimal

Exemples

- $10^2 = 100$
- $10^3 = 1\,000$
- $10^{-1} = 0{,}1$
- Chercher le nombre x tel que $10^x = 10\,000$.

Définition | Logarithme décimal

La fonction logarithme décimal, notée log, est définie sur $\mathbf{R}_+^*$.
Pour tout réel strictement positif x :

$$\log(x) = y \Longleftrightarrow 10^y = x.$$

Le logarithme décimal d'un nombre est donc l'exposant qu'il faut donner à 10 pour obtenir ce nombre.

Exemples

- $\log(100) = 2$ car $10^2 = 100$.
- $\log(1\,000) = 3$ car $10^3 = 1\,000$.
- $\log(1) = 0$ car $10^0 = 1$.
- $\log(0{,}01) = -2$ car $10^{-2} = 0{,}01$.

Exercice

Calculer :

1. $\log(10)$
2. $\log(100\,000)$
3. $\log(0{,}001)$
4. $\log(1)$

Propriétés

Soient a et b deux réels strictement positifs.

- $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$
- $\log(a^n) = n\log(a)$
- $\log\left(\dfrac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$

Exemples

- $\log(1\,000 \times 10) = \log(1\,000) + \log(10) = 3 + 1 = 4$
- $\log\left(\dfrac{1\,000}{10}\right) = 3 - 1 = 2$
- $\log(10^5) = 5\log(10) = 5$

Exercice

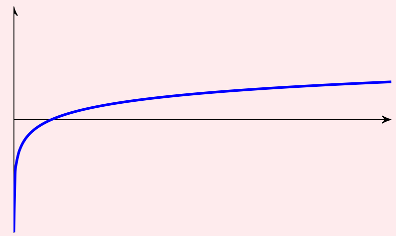
Simplifier :

1. $\log(10^7)$
2. $\log(1\,000) + \log(10)$
3. $\log(10\,000) - \log(100)$
4. $2\log(10)$

3 Variations de la fonction logarithme

Propriété

La fonction logarithme décimal est strictement croissante sur $\mathbf{R}_+^*$.



Corollaire

Comme la fonction logarithme est strictement croissante :

$$a < b \Longleftrightarrow \log(a) < \log(b)$$

pour tous réels strictement positifs a et b.

Exemples

- Comme $100 < 1\,000$:

$$\log(100) < \log(1\,000)$$

- Résoudre :

$$\log(x) > 2$$

On obtient :

$$x > 10^2$$

Donc :

$$x > 100$$

Exercice

Résoudre dans $\mathbf{R}$:

1. $\log(x) \leqslant 3$
2. $\log(x) > -1$
3. $\log(x) \geqslant 0$
4. $\log(x) < 2$

Exercice

Résoudre dans $\mathbf{R}$ les équations suivantes.

1. $\log(x) = 3$
2. $\log(2x-1) = 2$
3. $2\log(x) = 4$
4. $\log(x+3) - 1 = 2$
5. $3\log(x) - 2 = 1$

4 Applications économiques

Définition

Une évolution suivant un même taux t pendant n périodes vérifie :

$$V_n = V_0(1+t)^n$$

Exemple Le chiffre d'affaires d'une entreprise augmente de 5% par an.
On note C_n le chiffre d'affaires après n années.
Alors :

$$C_n = C_0 \times 1{,}05^n$$

Exemple Une entreprise souhaite doubler son chiffre d'affaires.
On cherche le nombre d'années n tel que :

$$1{,}05^n = 2$$

En prenant le logarithme :

$$\log\left(1{,}05^n\right) = \log(2)$$

Donc :

$$n\log(1{,}05) = \log(2)$$

Finalement :

$$n = \frac{\log(2)}{\log(1{,}05)}$$

À la calculatrice :

$$n \approx 14{,}2$$

Il faut donc environ 15 années pour doubler le chiffre d'affaires.

Exercice

Un capital est placé à intérêts composés au taux annuel de 3%.
On cherche le nombre d'années nécessaires pour multiplier ce capital par 1.5.

1. Écrire l'équation vérifiée.
2. Résoudre cette équation.
3. Interpréter le résultat.

Exercice

Le prix d'un produit augmente de 2% par an.
Après combien d'années le prix aura-t-il augmenté de 20% ?