

6

FONCTION EXPONENTIELLE DE BASE a

Résumé

Dans ce court chapitre, on propose de généraliser les calculs de puissances (ou plutôt exponentiels) à des exposants réels et non plus seulement entiers relatifs.

1 Introduction et premières propriétés

Exemples ► Calculer 2^3 , 2^{-2} et $2^{\frac{1}{2}}$.

► Simplifier $5^4 \times 5^{-1}$.

► Simplifier $\frac{3^6}{3^2}$.

Définition | Exponentielle de base a

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $a > 0$ et de premier terme 1.
On peut prolonger (u_n) en une fonction f : la **fonction exponentielle de base a** .

Cette fonction est définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(x) = a^x.$$

On prend la convention $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ si $x \leq 0$.

Propriétés

Les propriétés connues du calcul exponentiel sont toujours vraies.
Soient $a, b \in \mathbf{R}_+^*$ et $x, y \in \mathbf{R}$:

► $a^x a^y = a^{x+y}$

► $a^x b^x = (ab)^x$

► $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

► $(a^x)^y = a^{xy}$

Exercice

Calculer et écrire sous la forme d'une puissance.

1. $4^2 \times 4^3$

2. $\frac{10^7}{10^4}$

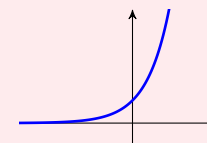
3. $2^3 \times 5^3$

2 Variations

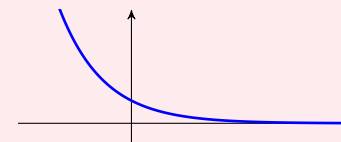
Propriétés | Variations d'une fonction exponentielle

Soit f la fonction exponentielle de base $a > 0$.

► Si $a > 1$, alors f est strictement **croissante** sur $\mathbf{R}$.



► Si $0 < a < 1$, alors f est strictement **décroissante** sur $\mathbf{R}$.



Exemples ► Soit f d'expression $f(x) = 2^x$. f est strictement croissante car sa base est strictement supérieure à 1.

► Soit f d'expression $f(x) = \left(\frac{7}{8}\right)^x$. f est strictement décroissante car sa base est strictement comprise entre 0 et 1.

► Soit f d'expression $f(x) = -3 \times 5^x$. f est strictement décroissante car $x \mapsto 5^x$ est strictement croissante.

Exercice

Donner les variations des fonctions suivantes définies sur $\mathbf{R}$.

1. $f: x \mapsto 5 \times 9^x$
2. $g: x \mapsto -2 \times 0,6^x$
3. $h: x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$

Exercice

Résoudre dans $\mathbf{R}$ les inéquations suivantes.

1. $5^x < 5^{12}$
2. $3^x \geq 9$
3. $0,8^{2x} < 0,8^{5x-1}$
4. $\left(\frac{6}{7}\right)^7 \leq \left(\frac{6}{7}\right)^{2-x}$

Exercice

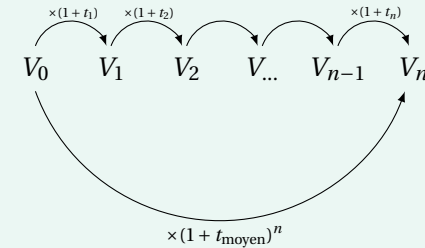
Une entreprise voit son chiffre d'affaires évoluer selon le modèle $C(x) = 1.04^x$, où x est le nombre d'années écoulées.

1. Interpréter le nombre 1.04.
2. Résoudre l'inéquation $1.04^x \geq 1.5$.

3 Application au taux moyen

Définition

Lors de n évolutions successives à des taux $t_1, t_2, \dots, t_n$ entre une valeur initiale V_0 et une valeur finale V_n , on appelle **taux d'évolution moyen** le taux noté t_{moyen} , qu'il faut appliquer n fois successivement à la valeur V_0 pour obtenir la valeur V_n .



$$(1 + t_{\text{moyen}})^n = (1 + t_1)(1 + t_2) \cdots (1 + t_n)$$

Propriété

Calculer un taux d'évolution moyen revient à trouver t_{moyen} tel que son coefficient multiplicateur associé est solution de : $x^n = CM$ où $CM > 0$ est le **coefficient multiplicateur global**.

$$t_{\text{moyen}} = CM^{\frac{1}{n}} - 1$$

Exemple D'après l'association *60 Millions de consommateurs*, le prix des pâtes a augmenté d'environ 11,4% entre février 2021 et février 2022. Ainsi, l'évolution a suivi un coefficient multiplicateur C_M de $1 + 0,114 = 1,114$.

Finalement, le coefficient multiplicateur moyen est $C_M^{\frac{1}{12}}$ et le taux moyen est :

$$t_{\text{moyen}} = (1 + 0,114)^{\frac{1}{12}} - 1.$$

Exercice

Résoudre dans $\mathbf{R}$ les équations $x^4 = 12$ et $y^9 = 3,2$.

Exercice

Le chiffre d'affaires d'une entreprise augmente de 6% par an pendant 4 ans.

1. Calculer le coefficient multiplicateur global.
2. Déterminer le taux annuel moyen correspondant.
3. Interpréter le résultat.

Exercice

On considère la fonction $f(x) = 1.2^x$.

1. Donner le sens de variation de f .
2. Calculer $f(5)$ et interpréter le résultat.
3. Résoudre l'inéquation $1.2^x \geq 2$.