

5

VARIABLES ALÉATOIRES

Résumé

Dans ce chapitre, nous améliorons notre formalisme pour décrire des événements probabilistes à l'aide des variables aléatoires et nous introduisons, l'espérance, l'un des outils les plus importants de toute la théorie des probabilités.

On se restreint à des expériences aléatoires sur un univers Ω fini.

1 Notions de variables aléatoires

1.1 Variable aléatoire réelle

Définition

Une **variable aléatoire réelle** X est une **fonction** définie sur Ω , à valeurs dans \mathbb{R} , de telle sorte que tout élément de Ω est associé à un unique nombre réel.

Exemples ► On lance une pièce de monnaie (équilibrée ou non) 10 fois à la suite et on note X le nombre de piles. X est une variable aléatoire réelle.

► Un professeur tire au sort un élève dans une classe de 32 élèves où chaque élève dispose de son propre numéro compris entre 1 et 32.

On note X le numéro de l'élève tiré au sort : c'est une variable aléatoire réelle.

Remarques ► Pour une même expérience aléatoire, on peut définir différentes variables aléatoires. On aurait pu définir Y le nombre de faces dans le premier exemple donné précédemment. Ainsi, on aurait eu $X + Y = 10$.

► On peut définir des événements à partir d'une variable aléatoire X comme $\{X = a\}$ correspondant aux issues telles que X prenne la valeur a ou $\{X > a\}$ correspondant aux issues telles que X prenne des valeurs strictement supérieures à a .

► La probabilité de ces événements sera notée $\mathbb{P}(X = a)$ et $\mathbb{P}(X > a)$.

1.2 Loi de probabilité

Définition

Donner la **loi de probabilité** d'une variable aléatoire X , c'est donner la probabilités de tous les événements $\{X = a\}$ définis par X .

On la présente usuellement sous forme de tableau où x_i sont les valeurs prises par X et p_i les probabilités $\mathbb{P}(X = x_i)$.

x_i	x_1	x_2	\dots	x_n
p_i	$\mathbb{P}(X = x_1)$	$\mathbb{P}(X = x_2)$	\dots	$\mathbb{P}(X = x_n)$

Exemple Une station de lavage automobile a constaté que, parmi ses clients :

- 90% lavent la carrosserie de leur voiture;
- 30% nettoient l'intérieur de leur voiture;
- 20 en % lavent la carrosserie et nettoient l'intérieur de leur voiture.

Le coût du lavage de la carrosserie est de 5€, celui du nettoyage de l'intérieur est de 2€.

On note X la variable aléatoire modélisant la dépense, en euro, d'un client de la station choisi au hasard.

x_i	2	5	7
p_i	$\mathbb{P}(X = 2)$	$\mathbb{P}(X = 5)$	$\mathbb{P}(X = 7)$

On sait déjà que $\mathbb{P}(X = 7) = 0,2$. De plus, il y a 10 % des clients qui nettoient l'intérieur sans laver la carrosserie, c'est-à-dire, $\mathbb{P}(X = 2) = 0,1$. Enfin, 70 % des clients lavent la carrosserie sans nettoyer l'intérieur donc $\mathbb{P}(X = 5) = 0,7$.

x_i	2	5	7
p_i	0,1	0,7	0,2

Propriété

La somme des probabilités p_i est égale à 1.
Autrement dit, $\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X = x_i) = 1$

Exemple On vérifie bien dans l'exemple de la laverie que $0,1 + 0,7 + 0,2 = 1$.

1.3 Espérance

Définition | Espérance

L'espérance de la variable aléatoire X est le nombre réel $\mathbb{E}[X]$ défini par :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X = x_i) \times x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n.$$

Remarque $\mathbb{E}[X]$ peut être vu comme une «moyenne probabiliste». En effet, on peut définir la moyenne d'une série statistique par la formule $\bar{x} = \sum_{i=0}^n f_i x_i$ où les f_i sont les fréquences.

Exemple Revenons à l'exemple de la laverie et calculons $\mathbb{E}[X]$.

x_i	2	5	7
p_i	0,1	0,7	0,2

On a :

$$\mathbb{E}[X] = 0,1 \times 2 + 0,7 \times 5 + 0,2 \times 7 = 5,1.$$

Ainsi, les clients dépensent en moyenne 5€10.

Remarque Soient a et b deux réels. On peut définir $Y=aX+b$ comme étant la variable aléatoire vérifiant la loi de probabilité suivante.

y_i	$ax_1 + b$	$ax_2 + b$...	$ax_n + b$
$\mathbb{P}(Y = y_i)$	p_1	p_2	...	p_n

Théorème | Linéarité de l'espérance

Soient a et b deux réels. On a :

$$\mathbb{E}[aX + b] = a\mathbb{E}[X] + b.$$

Exemple Une station de lavage concurrente propose une tarification à moitié prix (lavage à 2€50 et nettoyage à 1€) mais demande 2€ pour entrer dans la station. On considère que les habitudes des clients sont les mêmes que pour la station précédente.

On note Y la variable aléatoire modélisant la dépense d'un client tiré au sort dans cette deuxième station de lavage.

Ainsi, $Y = \frac{1}{2}X + 2$ de loi de probabilité suivante.

y_i	3	4,5	6,5
p_i	0,1	0,7	0,2

$$\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{2}\mathbb{E}[X] + 2 = \frac{1}{2} \times 5,1 + 2 = 4,55$$

Les clients dépensent donc en moyenne moins dans cette deuxième station.

2 Loi de Bernoulli et loi binomiale

Définition | Épreuve de Bernoulli

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire à deux issues, qu'on nomme **succès** et **échec**.

La probabilité du succès est usuellement notée p .

Remarque Si X est la variable aléatoire égale à 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec. X suit une loi de Bernoulli de paramètre p .

x_i	0	1
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$1 - p$	p

Exemple Le lancer d'une pièce de monnaie (équilibrée ou non) est une épreuve de Bernoulli.

Définition | Loi binomiale

L'enchaînement de n épreuves de Bernoulli de paramètre p , identiques et indépendantes, est un **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p .

Si on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès, X suit une **loi binomiale** de paramètres n et p .

Exemple On propose une carte de fidélité à tous les clients qui passent à la caisse d'un magasin.

On suppose que chaque client a une probabilité égale à 0,23 d'accepter la carte de fidélité et que les clients ne s'influencent pas entre eux.

Si 150 clients passent à la caisse un jour, le nombre X de cartes distribuées à la fin de la journée suit une loi binomiale de paramètres 150 et 0,23

Propriété | Espérance

Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p , alors :

$$\mathbb{E}[X] = np.$$

Exemple Dans l'exemple précédent, X a pour espérance $150 \times 0,23 = 34,5$. C'est-à-dire qu'on peut espérer avoir distribué environ 34 cartes de fidélité dans la journée.

3 Coefficients binomiaux

Définitions

► Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On appelle **factorielle** n le nombre $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$.

Par convention, $0! = 1$.

► Le nombre de combinaisons de k éléments parmi n éléments, noté $\binom{n}{k}$ et l'est :

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Propriétés

$$\blacktriangleright \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\blacktriangleright \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

$$\blacktriangleright \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Théorème | Formule de Pascal

Soit $1 \leq k \leq n$.

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Remarque Avec les résultats précédents, nous pouvons calculer tous les coefficients binomiaux de proche en proche.

Nous allons le faire grâce au célèbre **triangle de Pascal** qui représente les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	...
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
...

La construction se fait ligne par ligne et on obtient les coefficients du dessous par addition des deux supérieurs comme indiqués sur le tableau précédent.

Théorème | Probabilités des issues

Soit X qui suit une loi binomiale de paramètres n et p .

Pour tout k entier dans $[0; n]$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$