

# 4

## SUITES NUMÉRIQUES

### Résumé

Nous créons ici un catalogue de suites numériques usuelles. Les suites arithmétiques, qui modélisent des croissances linéaires, et les suites géométriques, pour des croissances exponentielles, sont toutes désignées.

### 1 Suites arithmétiques

#### Définition

Soient  $r \in \mathbb{R}$  et  $(u_n)$  une suite numérique définie sur  $\mathbb{N}$  par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

$(u_n)$  est appelée **suite arithmétique de raison  $r$** .

**Exemples** ► Les deux suites suivantes sont arithmétiques, respectivement de raison de 2,3 et -1 :

$$\begin{cases} u_0 = 12 \\ u_{n+1} = u_n + 2,3 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_0 = 10 \\ v_{n+1} = v_n - 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

► Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique de raison 3 et de premier  $u_0 = -5$ .

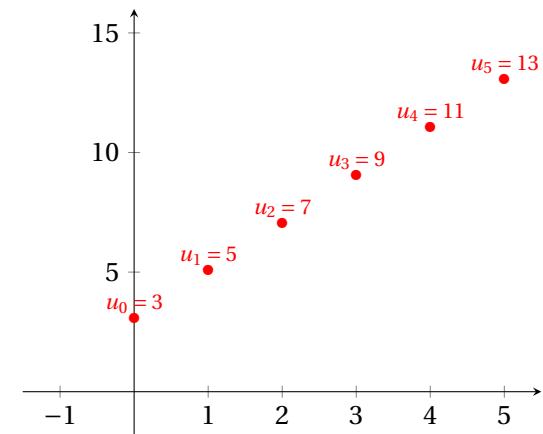
Alors,  $u_1 = u_0 + 3 = -5 + 3 = -2$ . De même,  $u_2 = u_1 + 3 = 1$ . On peut continuer indéfiniment :  $u_3 = 4$ ,  $u_4 = 7$ ,  $u_5 = 10$ , ...

#### Propriété

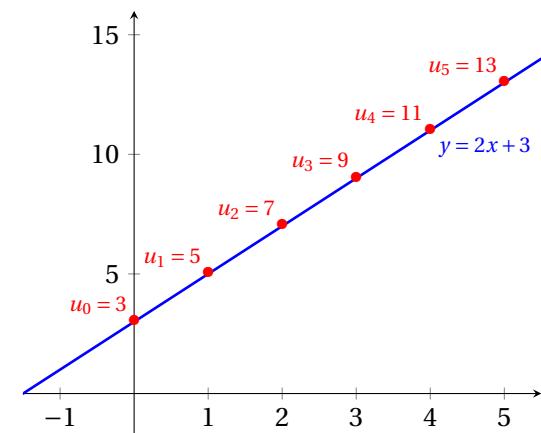
Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est arithmétique de raison  $r$  et de premier terme  $u_0$  si, et seulement si, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_n = u_0 + nr.$$

**Exemple** Représentions la suite arithmétique  $(u_n)$  de raison 2 et de premier terme 3.



La forme explicite de  $(u_n)$  est :  $u_n = 2n + 3$  si  $n \in \mathbb{N}$ . Il est ainsi cohérent de constater que les représentations de  $(u_n)$  et de la fonction affine  $f$  d'expression  $f(x) = 2x + 3$  coïncident sur  $\mathbb{N}$ .



## Théorème | Termes consécutifs

$x, y$  et  $z$  sont trois **termes consécutifs** d'une suite arithmétique si  $\frac{x+z}{2} = y$ .

## Propriété | Somme des premiers termes

Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique de raison  $r$  et de premier terme  $u_0$ .

On peut calculer  $S_n = u_0 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k$  la somme des  $n+1$  premiers termes par la formule suivante :

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = \frac{u_0 + u_n}{2} \times (n+1)$$

**Exemple** Calculons  $S = 1 + 3 + 5 + \dots + 21$ . Cette somme correspond à la somme des 11 premiers termes de la suite arithmétique de raison 2 et de premier terme 1.

$$S = \frac{1+21}{2} \times 11 = 11^2 = 121.$$

**Remarque** On peut calculer la somme des entiers de 1 à  $n$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$  grâce à la propriété précédente. Ainsi,

$$1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

## 2 Suites géométriques

### Définition

Soient  $q \neq 0$  et  $(u_n)$  une suite numérique définie sur  $\mathbb{N}$  par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = q \times u_n.$$

$(u_n)$  est appelée **suite géométrique de raison  $q$** .

**Exemple** Soit  $(u_n)$  une suite géométrique de raison 2 et de premier  $u_0 = 1,3$ .

Alors,  $u_1 = 2 \times u_0 = 3 \times 1,3 = 2,6$ . De même,  $u_2 = 2 \times u_1 = 5,2$ . On peut continuer indéfiniment :  $u_3 = 10,4$ ,  $u_4 = 20,8$ ,  $u_5 = 41,6$ , ...

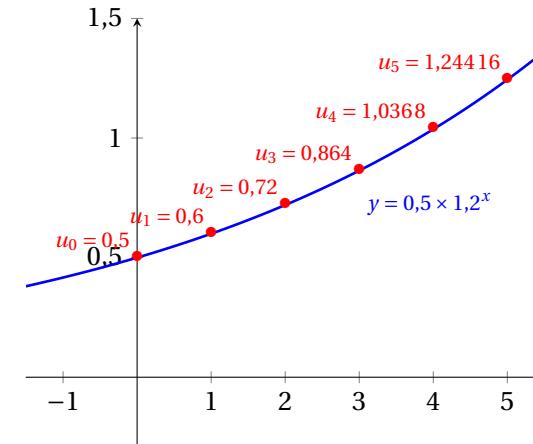
### Propriété

Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique de raison  $q$  et de premier terme  $u_0$  si, et

seulement si, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_n = u_0 \times q^n$$

**Exemple** Représentons la suite géométrique  $(u_n)$  de raison 1,2 et de premier terme 0,5.



### Théorème | Termes consécutifs

$x, y$  et  $z$  positifs sont trois **termes consécutifs** d'une suite géométriques si  $\sqrt{xz} = y$ .

### Propriété | Somme des premiers termes

Soit  $(u_n)$  une suite géométrique de raison  $q \neq 1$  et de premier terme  $u_0$ .

On peut calculer  $S_n = u_0 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k$  la somme des  $n+1$  premiers termes par la formule suivante :

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

**Exemple** Calculons  $S = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2048$ . Cette somme correspond aux 12 premiers termes d'une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme 1.

$$\text{Ainsi, } S = \frac{1-2^{12}}{1-2} = \frac{1-4096}{1-2} = 4095.$$