3

Probabilités conditionnelles

Résumé

C'est à une uvre de Thomas Bayes (1702-1761), publiée à titre posthume, que l'on doit la première théorie sur les probabilités conditionnelles.
Ces probabilités permettent de traiter, par exemple, beaucoup de problèmes d'expériences aléatoires à la suite et/ou liées.

1 Rappels sur les probabilités

1.1 Généralités

Définition

L'ensemble de toutes les issues possibles (ou **éventualités**) possibles d'une expérience aléatoire s'appelle l'**univers** de cette expérience aléatoire (souvent noté Ω).
Un sous-ensemble de cet univers est appelé un **événement**.

Propriété

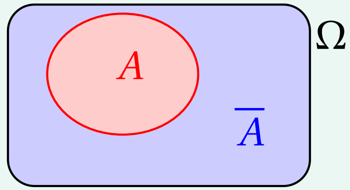
Une probabilité est toujours un nombre compris **entre 0 et 1**.
Dans le cas où toutes les issues sont **équiprobables**, la **probabilité** d'un événement est le quotient :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables à } A}{\text{nombre de cas possibles dans l'univers}}.$$

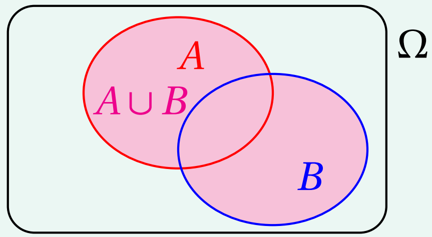
1.2 Calculs de probabilités

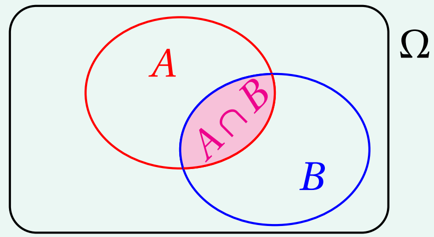
Définitions

L'**évènement contraire** d'un évènement A, noté $\overline{A}$, est l'ensemble de toutes les issues qui ne réalisent pas A.



L'**intersection** $A \cap B$ de deux événements est l'événement qui se réalise lorsque A **et** B se réalisent *simultanément*.
La **réunion** $A \cup B$ de deux événements est l'événement qui se réalise lorsque l'*un au moins* des deux événements se réalise (l'un **ou** l'autre **ou** les deux).





Propriétés

Pour deux évènements A et B, on a :

- $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Exemple Un laboratoire pharmaceutique a réalisé des tests sur 800 patients atteints dune maladie. Certains sont traités avec le médicament A, dautres avec le médicament B.
Le tableau ci-dessous présente les résultats de létude :

	Médicament A	Médicament B	Total
Guéri	383	291	674
Non guéri	72	54	126
Total	455	345	800

On choisit au hasard un patient testé, et on appelle A l'événement "le patient a été traité avec le médicament A" et G : "il est guéri".

- $\overline{A}$ est l'événement : "le patient a été traité avec le médicament B" ;
- $A \cap G$ est l'événement : "le patient a été traité avec le médicament A **et** est guéri" ;
- $A \cup G$ est l'événement : "le patient a été traité avec le médicament A **ou** est guéri".

On a, de plus :

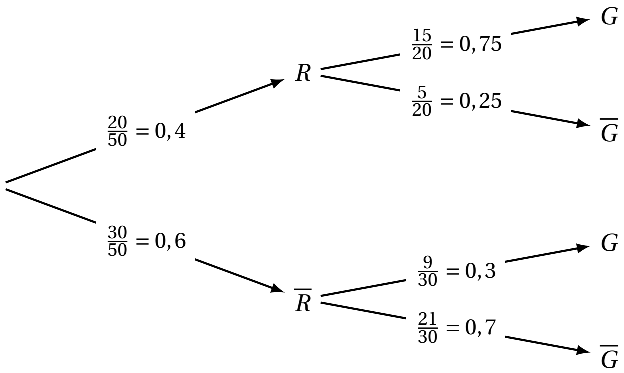
- $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A) = 1 - \dfrac{455}{800} = \dfrac{345}{800}$;
- $\mathbb{P}(A \cap G) = \dfrac{383}{800}$;
- $\mathbb{P}(A \cup G) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(G) - \mathbb{P}(A \cap G) = \dfrac{455}{800} + \dfrac{674}{800} - \dfrac{383}{800} = \dfrac{746}{800}$.

2 Arbre pondéré

Définition | Arbre pondéré

Un **arbre pondéré** est un arbre de choix dans lequel les **branches** n'ont pas toutes le même poids. Chacune des branches est alors affectée d'un nombre précisant la **probabilité** de passer par ce chemin plutôt qu'un autre.
À chaque **nœud**, on trouve toujours un événement.

Exemple - Tirage dans une urne Un sac contient 20 boules rouges et 30 boules bleues. Chacune d'entre elles porte l'une des mentions "Gagné" ou "Perdu". 15 boules rouges et 9 boules bleues sont gagnantes.
On tire au hasard une boule dans le sac, et on appelle R l'événement "La boule tirée est rouge" et G "La boule tirée est gagnante".
On peut schématiser cette expérience par l'arbre pondéré :



Théorème

- La somme des probabilités de toutes les branches partant d'un même nœud est égale à 1.
- La probabilité d'un chemin est égale au produit des probabilités de tous les branches qui le composent.
- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités de tous les chemins qui mènent à cet événement.

Exemple - Tirage dans une urne La probabilité d'obtenir une boule rouge gagnante est $\frac{15}{50} = \frac{3}{10} = \mathbb{P}(R \cap G)$.
Sur l'arbre, on retrouve bien $0,4 \times 0,75 = 0,3$.
La probabilité d'obtenir une boule gagnante est $\frac{15+9}{50} = 0,48$.
Sur l'arbre, il y a deux chemins qui mènent à G : le chemin $R \cap G$, de probabilité $0,3$ et le chemin $\overline{R} \cap G$ de probabilité $0,6 \times 0,3 = 0,18$.
On retrouve aussi :

$$\mathbb{P}(R \cap G) + \mathbb{P}(\overline{R} \cap G) = 0,3 + 0,18 = 0,48 = \mathbb{P}(G)$$

.

3 Probabilités conditionnelles

Définition

Sur un arbre pondéré, les probabilités données sur les premières branches (les branches "primaires") sont des probabilités classiques, mais pour les branches suivantes ("secondaires"), ce sont des **probabilités conditionnelles**. En fait, ce sont les probabilités d'arriver à ce nœud *sachant que l'on vient de tel autre nœud*.
La probabilité conditionnelle que l'évènement B se réalise sachant que l'évènement A est réalisé se note $\mathbb{P}_A(B)$ (à lire "probabilité de B sachant A").
Enfin, si $\mathbb{P}(A) \neq 0$:

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Remarque On peut évidemment inverser le rôle de A et B et si $\mathbb{P}(B) \neq 0$, alors $\mathbb{P}_B(A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$.

Exemple - Tirage dans une urne $\mathbb{P}_R(G) = 0{,}75$ est la probabilité de tirer une boule gagnante *sachant qu'elle est rouge*, autrement dit, la probabilité de tirer une boule rouge gagnante *parmi les rouges*. Cette probabilité découle de la constitution de l'urne.

$\mathbb{P}_G(R)$ ne figure pas dans l'arbre. C'est la probabilité d'avoir tiré une boule rouge *sachant qu'elle est marquée gagnante*, autrement dit la probabilité de tirer une boule rouge gagnante *parmi les boules gagnantes*. C'est moins naturel dans ce sens, puisqu'on voit la couleur de la boule avant d'y trouver la marque.

$$\mathbb{P}_G(R) = \frac{\mathbb{P}(G \cap R)}{\mathbb{P}(G)} = \frac{0{,}3}{0{,}48} = 0{,}625$$

On peut tout de même retrouver cette probabilité grâce à la constitution de l'urne : sur les $15 + 9 = 24$ boules gagnantes, il y en a 15 rouges et $\frac{15}{24} = 0{,}625$.

Propriétés

Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$, on a :

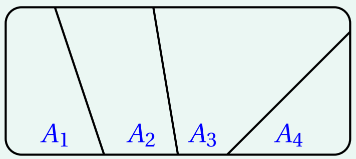
- $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)$
- $\mathbb{P}_A(\overline{B}) = 1 - \mathbb{P}_A(B)$.

4 Probabilités totales

Définition | Partition de l'univers

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ une liste d'événements relatifs à une même expérience aléatoire.
On dit que ces événements réalisent une **partition** de l'univers si :

- aucun de ces événements n'est impossible
- ils sont deux à deux disjoints (d'intersection vide)
- la réunion de tous ces événements recouvre l'univers tout entier.

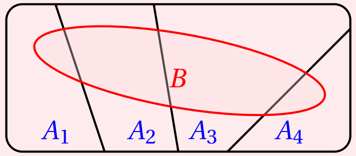


Remarque Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$, alors A et $\overline{A}$ forment une partition de Ω.

Théorème | Formule des probabilités totales

Pour une partition de l'univers $A_1, A_2, \ldots, A_n$ et pour tout événement B, on a :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A_1 \cap B) + \mathbb{P}(A_2 \cap B) + \cdots + \mathbb{P}(A_n \cap B)$$

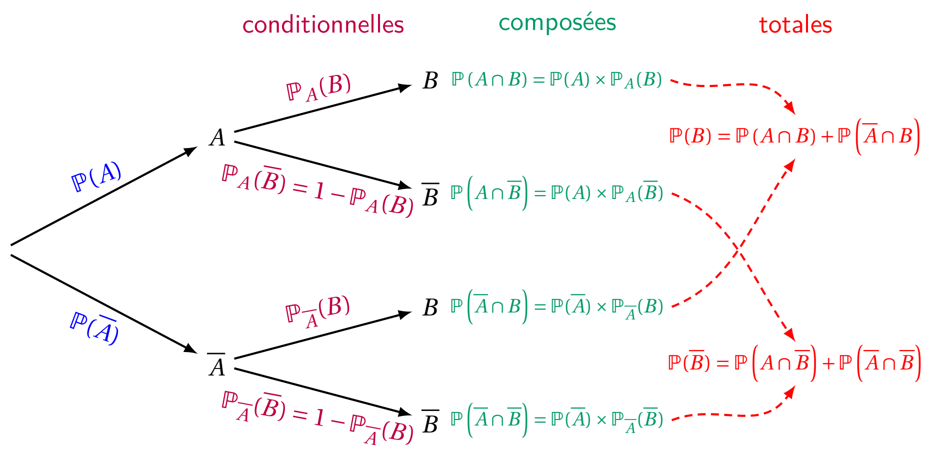


En particulier, pour tout événements A et B :

$$\mathbb{P}(B) = P(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B)$$

Remarque Sur un arbre, on peut visualiser et représenter différentes probabilités mises en jeu :

- des conditionnelles ;
- les composées ;
- les totales.



5 Indépendance

Définition

Soient A et B deux événements de probabilités non-nulles. On dit que A et B sont **indépendants** si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.

Propriété

On a de façon équivalente :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \Leftrightarrow \mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B) \Leftrightarrow \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$$

Remarque Pour montrer que A et B soient indépendants, il ne suffit que de vérifier une seule de ces trois conditions équivalentes.

Exemple On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. On appelle C l'événement "Obtenir un cur" et D "Obtenir une dame". $C \cap D$ est alors "Obtenir la dame de cur".

- $\mathbb{P}(C) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ et $\mathbb{P}(D) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ et $\mathbb{P}(C \cap D) = \frac{1}{32}$ et $\frac{1}{4} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{32}$ donc C et D sont indépendants.

  On a aussi $\mathbb{P}_C(D) = \mathbb{P}(D)$, c'est-à-dire que la probabilité d'obtenir une dame parmi les curs est la même que celle d'obtenir une dame parmi toutes les cartes : $\frac{1}{8}$.

Maintenant, si on rajoute deux jokers dans le jeu :

- $\mathbb{P}(C) = \frac{8}{34}$ et $\mathbb{P}(D) = \frac{4}{34}$ et $\mathbb{P}(C \cap D) = \frac{1}{34}$ et $\mathbb{P}(C) \times \mathbb{P}(D) = \frac{8 \times 4}{34 \times 34} \neq \mathbb{P}(C \cap D)$ donc C et D pas indépendants.

  De même, $\mathbb{P}_C(D) = \frac{1}{8}$ mais $\mathbb{P}(D) = \frac{4}{34}$ et ces probabilités ne sont plus égales.