Devoir surveillé 4

Calculatrice autorisée

Mercredi 7 février 2024

Exercice 1 (5 points)

1. Donner les 4 formules d'addition trigonométriques.

2. Résoudre dans **C** l'équation $2z^2 = -8$.

3. Soit T la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$.

   a. Donner l'expression complexe de T.

   b. Calculer l'affixe de A', l'image par T du point $A(-7;11)$.

Correction

1. Voir cours.

2.

$$\begin{aligned} &2z^2 = -8 \\ \Leftrightarrow\ &z^2 = -4 \\ \Leftrightarrow\ &z = 2i \text{ ou } z = -2i \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions complexes à $2z^2 = -8$ est $\{-2i; 2i\}$.

3. **a.** $\vec{u}$ a pour affixe $1-2i$ donc $T(z) = z+1-2i$.

   b. A a pour affixe $z_A = -7+11i$ et donc l'affixe de A' est $T(z_A)$.

$$\begin{aligned} T(z_A) &= z_A + 1 - 2i \\ &= -7+11i+1-2i \\ &= -6+9i \end{aligned}$$

Exercice 2 (15 points)

Les résistances et les condensateurs sont des composants électroniques utilisés dans le domaine du son pour concevoir des filtres. Placé en sortie d'un microphone, un filtre atténue plus ou moins les sons selon leur fréquence f, exprimée en Hertz (Hz).

$$\boxed{\text{micro}} \to \boxed{\text{filtre}} \to \boxed{\text{ampli}} \to \boxed{\text{enceinte}}$$

Pour un filtre donné, l'atténuation d'un son se calcule à l'aide de deux nombres complexes z_R.

Dans tout l'exercice, on suppose que $z_R = 10$ et $z_C = -\dfrac{1000\sqrt{3}}{f}i$.

Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A : Effet du filtre sur un son grave

On choisit un son grave de fréquence $f = 100$.

1. Montrer que $z_C = -10\sqrt{3}i$.

2. **a.** Déterminer la forme exponentielle de z_C.

b. On considère le nombre complexe $Z = z_R + z_C$. On a donc $Z = 10 - 10\sqrt{3}i$.
Déterminer la forme exponentielle de Z.

c. On considère le nombre complexe z_G défini par : $z_G = \dfrac{z_C}{z_R + z_C}$.

Montrer que $z_G = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}}$.

d. Le module du nombre complexe z_G est appelé gain du filtre.
Donner la valeur exacte du gain du filtre puis une valeur approchée au centième.

Partie B : Effet du filtre sur un son aigu

On choisit un son aigu de fréquence $f = 1\,000\sqrt{3}$.

1. Montrer que le nombre complexe z_G défini par $z_G = \dfrac{z_C}{z_R + z_C}$ est égal à $\dfrac{-i}{10-i}$.

2. Déterminer la forme algébrique de z_G .

3. Calculer la valeur exacte du gain du filtre $|z_G|$ et en donner une valeur approchée au centième.

CORRECTION

Partie A : Effet du filtre sur un son grave

1. $z_C = -\dfrac{1\,000\sqrt{3}}{100}i = -10\sqrt{3}i$.

2. **a.** Avec $-1 = \mathrm{e}^{i\pi}$ et $i = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}$, on a
$z_C = \mathrm{e}^{i\pi} \times 10\sqrt{3}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}} = 10\sqrt{3}\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{2}}$.

b. On considère le nombre complexe $Z = z_R + z_C$. On a donc $Z = 10 - 10\sqrt{3}i$.
$|Z|^2 = 10^2 + \left(-10\sqrt{3}\right)^2 = 100 + 300 = 400 = 20^2$, d'où $|Z| = 20$.

Donc $Z = 20\left(\dfrac{10}{20} - i\dfrac{10}{20}\sqrt{3}\right) = 20\left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 20\left(\cos -\frac{\pi}{3} + i\sin -\frac{\pi}{3}\right) = 20\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}$.

c. $z_G = \dfrac{z_C}{z_R + z_C} = \dfrac{10\sqrt{3}\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{2}}}{20\mathrm{e}^{i\frac{-\pi}{3}}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{i\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{i\left(\frac{9\pi}{6}+\frac{2\pi}{6}\right)} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{i\frac{11\pi}{6}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}}$.

d. On a $|z_G| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Une valeur approchée de ce gain est 0,866 025, soit 0,87 au centième près.

Partie B : Effet du filtre sur un son aigu

1. $z_C = -\dfrac{1\,000\sqrt{3}}{1\,000\sqrt{3}}i = -i$

$z_G = \dfrac{z_C}{z_R + z_C} = \dfrac{-i}{10-i}$.

2. $z_G = \dfrac{-i}{10-i} = \dfrac{-i(10+i)}{(10-i)(10+i)} = \dfrac{1-10i}{100+1} = \dfrac{1}{101} - i\dfrac{10}{101}$.

3. On a $|z_G|^2 = \left(\dfrac{1}{101}\right)^2 + \left(\dfrac{10}{101}\right)^2 = \dfrac{101}{101^2} = \dfrac{1}{101}$.
Donc le gain du filtre est égale à :

$|z_G| = \sqrt{\dfrac{1}{101}} = \dfrac{1}{\sqrt{101}} \approx 0{,}0995$ soit environ 0,10 au centième.