DEVOIR SURVEILLÉ 3

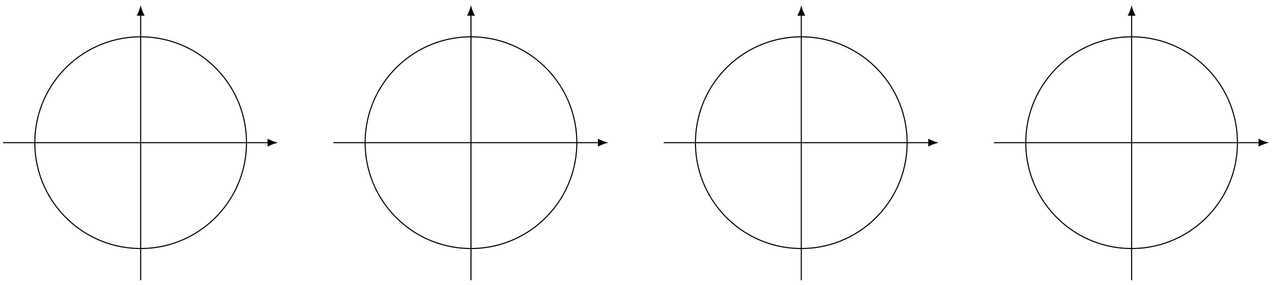
Calculatrice interdite

Mercredi 22 novembre 2023

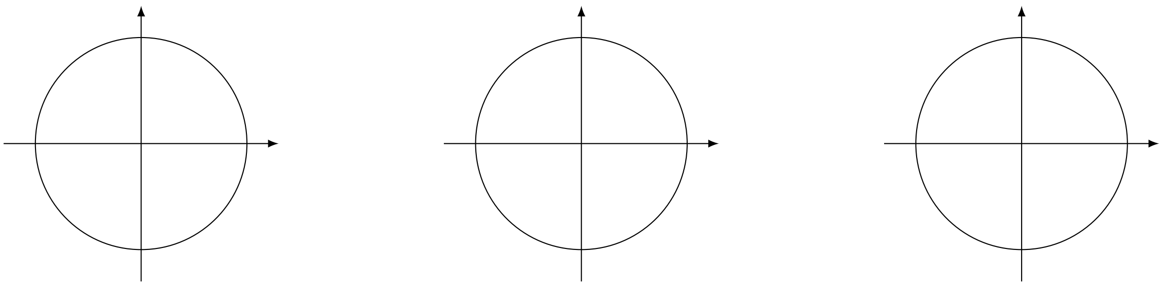
EXERCICE 1 (5 POINTS)

Pour chaque question, placer sur le cercle les points associés aux réels données.

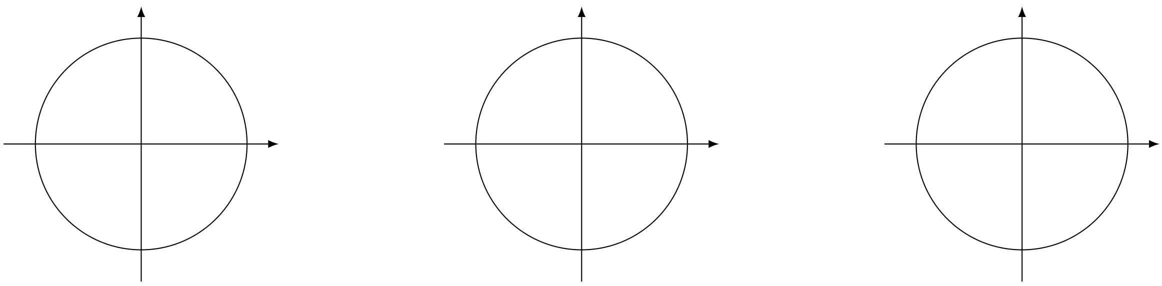
1. $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$; π



2. $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{2}$



3. $-\frac{\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{2}$; $-\frac{2\pi}{3}$



CORRECTION

Exercice de cours.

EXERCICE 2 (6 POINTS)

Résoudre dans $[0;2\pi[$ les équations suivantes.

1. $\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

2. $\sin(x) = 0$

3. $2\cos(x) = 1$

4. $-8\sin(x) = 4\sqrt{3}$

CORRECTION

1. $\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\cos(\pi - \frac{\pi}{4}) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos(\pi + \frac{\pi}{4}) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Les solutions de $\cos(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ dans $[0;2\pi[$ sont $\dfrac{3\pi}{4}$ et $\dfrac{5\pi}{4}$.

2. Sur $[0;2\pi[$, $\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \pi$.

3. $2\cos(x) = 1 \Leftrightarrow \cos(x) = \frac{1}{2}$

Or sur $[0;2\pi[$, $\cos(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{5\pi}{3}$.

4. $-8\sin(x) = 4\sqrt{3} \Leftrightarrow \sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

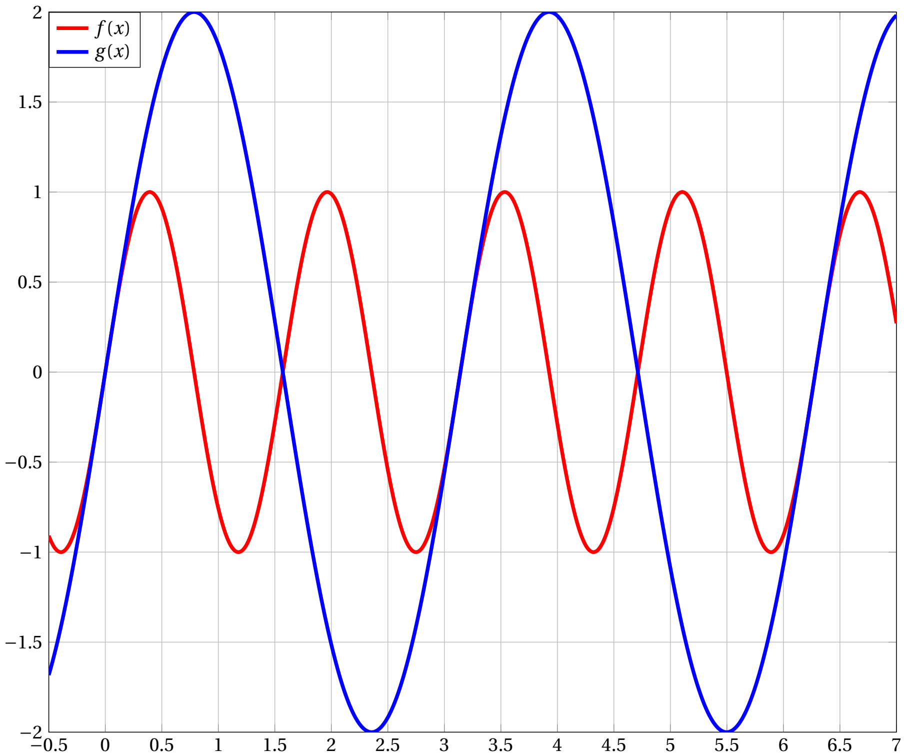
On sait que $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\sin(\frac{5\pi}{3}) = \sin(-\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Aussi, par symétrie, $\sin(\frac{4\pi}{3}) = \sin(\frac{5\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Les solutions dans $[0;2\pi[$ de $-8\sin(x) = 4\sqrt{3}$ sont $\dfrac{4\pi}{3}$ et $\dfrac{5\pi}{3}$.

EXERCICE 3 (4 POINTS)

Donner, pour chacune des courbes suivantes, l'amplitude A, la pulsation ω et la période T.



CORRECTION

Pour f : $A = 1$ et $\omega = 4$ donc $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

Pour g : $A = 2$ et $\omega = 2$ donc $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

EXERCICE 4 (5 POINTS)

Les affirmation suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1. Si $x \leqslant y$ alors $\sin(x) \leqslant \sin(y)$.

2. Si $\cos(x) = \cos(y)$ alors $x = y$.

3. Si $x \leqslant 0$ alors $\sin(x) \leqslant 0$.

4. Pour tout réel x, on a :

$$(\sin(x)+\cos(x))^2+(\sin(x)-\cos(x))^2=2.$$

5. Pour tout réel x, on a :

$$\cos(x)=\sqrt{1-\sin(x)^2}.$$

Correction

1. FAUX. Prenons $x=\frac{\pi}{2}$ et $y=\pi$. Nous avons $x\leqslant y$ mais $\sin(x)>\sin(y)$.
2. FAUX. Prenons $x=\frac{\pi}{2}$ et $y=-\frac{\pi}{2}$. Nous avons $\cos(x)=\cos(y)=0$ mais $x\neq y$.
3. FAUX. Si $x=-\frac{3\pi}{2}$ alors $\sin(x)=1>0$.
4. VRAI. On sait que, par définition, pour tout réel x, $\cos(x)^2+\sin(x)^2=1$.
   Donc, en utilisant les identités remarquables :

$$\begin{aligned}(\sin(x)+\cos(x))^2+(\sin(x)-\cos(x))^2&=\sin(x)^2+2\sin(x)\cos(x)+\cos(x)^2+\sin(x)^2-2\sin(x)\cos(x)+\cos(x)^2\\&=2\sin(x)^2+2\cos(x)^2\\&=2\end{aligned}$$

5. FAUX. Si $x=\pi$ alors $\cos(x)=-1$ et $\sqrt{1-\sin(x)^2}=\sqrt{1}=1$.