DEVOIR SURVEILLÉ 2

Calculatrice autorisée

Mercredi 4 octobre 2023

EXERCICE 1 (3 POINTS)

Répondez par vrai ou faux. Aucune justification attendue.

1. La moyenne arithmétique de 3 et 5 est $\sqrt{15}$.
2. La moyenne géométrique de 2 et 10 est $2\sqrt{5}$.
3. La somme $1+2+3+\cdots+n$ est égale à $\dfrac{n(n+1)}{2}$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

CORRECTION

1. Faux. La moyenne arithmétique de 3 et 5 est $\dfrac{3+5}{2} = 4 = \sqrt{16} \neq \sqrt{15}$.
2. Vrai. La moyenne géométrique de 2 et 10 est $\sqrt{2\times 10} = \sqrt{4\times 5} = 2\sqrt{5}$.
3. Vrai. $1+2+3+\cdots+n$ est la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme 0.
$$1+2+3+\cdots+n = \frac{0+n}{2}\times(n+1) = \frac{n(n+1)}{2}$$

EXERCICE 2 (6 POINTS)

La cloche d'une église sonne toutes les heures : 1 coup à 1h00, 2 coups à 2h00, etc. . . Un villageois se plaint du bruit. Pour tout entier naturel n non nul, on note (u_n) le nombre de coups à la n^{e} heure.

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
2. Déterminer la nature de la suite (u_n) et donner son terme général en fonction de n.
3. Combien de tintements le villageois entend-il en une journée ?

CORRECTION

Le problème peut se traiter de deux manières : traditionnellement en découpant l'après-midi en 13h00=1h00, ..., 0h00=12h00 **ou** en appliquant à la lettre l'énoncé, à savoir, avec 13 coups à 13h00, ..., 24 coups à minuit.

On traitera ici de la deuxième approche.

1. $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = 3$ et $u_4 = 4$
2. Par construction, il y a un coup supplémentaire chaque heure jusqu'à la fin de la journée.
Ainsi, pour tout entier naturel compris entre 1 et 23, nous avons :
$$u_{n+1} = 1 + u_n.$$
C'est la relation de récurrence d'une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme $u_1 = 1$.
Son terme général est donc, pour $n \geqslant 1$:
$$u_n = 1 + 1\times(n-1) = n.$$
3. En une journée, le villageois entend un nombre de coups S égal à la somme des 24 premiers termes de la suite (u_n).
$$S = \sum_{k=1}^{24} u_k = \frac{u_1+u_{24}}{2}\times 24 = \frac{25}{2}\times 24 = 300.$$

EXERCICE 3 (6 POINTS)

Une légende raconte que le roi des Indes, qui s'ennuyait terriblement, demanda au sage Sissa de lui trouver une distraction. Le roi fut très heureux lorsque Sissa lui proposa le jeu d'échecs. En récompense, le souverain proposa à Sissa de réaliser l'un de ses souhaits. Ce dernier demanda alors à son roi du riz : 1 grain sur la 1$^{\text{ère}}$ case d'un échiquier, 2 sur la 2$^{\text{e}}$ case, 4 sur la 3$^{\text{e}}$, et ainsi de suite, en doublant le nombre de grains à chaque nouvelle case. Le but de l'exercice est de déterminer le nombre de grains de riz que devra fournir le souverain au sage Sissa.

Pour tout entier naturel n inférieur ou égal à 64, on note u_n le nombre de grains déposés sur la n^{e} case. Ainsi, on a : $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = 4\ldots$ On rappelle qu'un échiquier contient 64 cases.

1. Expliquer pourquoi (u_n) est une suite géométrique. On donnera la raison et le premier terme.

2. En déduire le terme général u_n en fonction de n.

3. Calculer le nombre de grains de riz sur la dernière case de l'échiquier.

4. En calculant le nombre total de grains qui devront être posés sur l'échiquier par le souverain, montrer que Sissa s'est montré très malin.

CORRECTION

1. On double le nombre de grains de riz à chaque case donc par construction de (u_n), on a la relation de récurrence, pour tout $n \geqslant 1$:

$$u_{n+1} = 2u_n$$

qui est celle d'une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $u_1 = 1$.

2. Comme (u_n) une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $u_1 = 1$, on a, pour tout $n \geqslant 1$:

$$u_n = u_1 \times q^{n-1} = 2^{n-1}$$

3. Sur la dernière case de l'échiquier, il y a $u_{64} = 2^{63} \approx 9{,}2 \times 10^{18}$ grains de riz.

4.

$$\sum_{k=1}^{64} u_k = u_1 \times \frac{1-q^{64}}{1-q} = \frac{1-2^{64}}{1-2} \approx 1{,}8 \times 10^{19}$$

Il y a ainsi, au total, sur tout l'échiquier, environ $1{,}8 \times 10^{19}$ grains de riz ce qui est tout simplement colossal et a priori, trop pour le roi. (Il y aurait $7{,}5 \times 10^{18}$ grains de sable sur Terre.)

EXERCICE 4 (5 POINTS)

1. Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q = \sqrt{2}$ et de premier terme $u_0 = 2$.

Calculer $S_{10} = \sum_{k=0}^{10} u_k$.

2. Calculer $S = 3 + \dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{4} + \cdots + \dfrac{3}{2048}$ en utilisant une suite géométrique adéquate.

3. Calculer $S = 0{,}0005 + 0{,}005 + 0{,}05 + \cdots + 500\,000$ en utilisant une suite géométrique adéquate.

CORRECTION

1.

$$S_{10} = \sum_{k=0}^{10} u_k = u_0 \times \frac{1-q^{11}}{1-q} = 2 \times \frac{1-\sqrt{2}^{11}}{1-\sqrt{2}} \approx 213{,}681$$

2. $S = \sum_{k=0}^{11} u_k$ où (u_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme 3.

$$S = \sum_{k=0}^{11} u_k = u_0 \times \frac{1-q^{11+1}}{1-q} = 3 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{12}}{1-\frac{1}{2}} \approx 5{,}999$$

3. $S = \sum_{k=0}^{9} u_k$ où (u_n) est une suite géométrique de raison 10 et de premier terme $0{,}0005$.

$$S = \sum_{k=0}^{9} u_k = u_0 \times \frac{1-q^{9+1}}{1-q} = 0{,}0005 \times \frac{1-10^{10}}{1-10} = 555\,555{,}5555$$