

DEVOIR SURVEILLÉ 1

Calculatrice autorisée

Mercredi 20 septembre 2023

EXERCICE 1 (6 POINTS)

Le tableau ci-dessous donne la répartition en 2005 et 2010 des ouvriers et cadres dans une entreprise, ainsi que le salaire de chacun.

| | 2005 | | 2010 | |
|----------|-----------|----------|-----------|----------|
| | Effectifs | Salaires | Effectifs | Salaires |
| Cadres | 30 | 2500 | 20 | 2600 |
| Ouvriers | 40 | 1200 | 50 | 1300 |
| Total | 70 | 123 000 | 70 | 117 000 |

Le directeur affirme : “dans mon entreprise, en 5 ans, tous les salaires ont augmenté, ceux des cadres et ceux des ouvriers”.

Le responsable syndical affirme : “dans l’entreprise, en 5 ans, le salaire moyen a diminué.”

Qui a raison ?

Calculer le pourcentage d’évolution (augmentation ou diminution) du salaire des cadres, du salaire des ouvriers, et du salaire moyen entre 2005 et 2010.

CORRECTION

- Entre 2005 et 2010, le salaire des cadres est passé de 2500 à 2600 et celui des ouvriers de 1200 à 1300. **Le directeur dit vrai.**

EN 2005, le salaire moyen était de $\frac{123\,000}{70} \approx 1\,757,14$ euros tandis qu’en 2010, il était de $\frac{117\,000}{70} \approx 1\,671,43$ euros. **Le responsable syndical a aussi raison.**

- Calculons d’abord les taux d’évolution associés. Nous donnerons ensuite les pourcentages d’évolution.

$$\tau_{cad} = \frac{2600}{2500} = 1,04 \text{ donc il y a eu } 4\% \text{ d’évolution pour le salaire des cadres.}$$

$$\tau_{ouv} = \frac{1300}{1200} \approx 1,083 \text{ donc il y a eu } 8,3\% \text{ d’évolution pour le salaire des ouvriers.}$$

$$\tau_{moy} \approx \frac{1\,671,43}{1\,757,14} \approx 0,951 \text{ donc il y a eu } -4,9\% \text{ d’évolution pour le salaire moyen.}$$

EXERCICE 2 (4 POINTS)

Calculer, en **détaillant**, la moyenne, la variance et l’écart type de la série :

| | | | |
|---------------------|-----|-----|-----|
| Valeur du caractère | -12 | 5 | 9 |
| Fréquence | 0,2 | 0,2 | 0,6 |

CORRECTION

- La moyenne est égale à $m = 0,2 \times (-12) + 0,2 \times 5 + 0,6 \times 9 = 4$.
- La variance est égale à $V = 0,2 \times ((-12) - 4)^2 + 0,2 \times (5 - 4)^2 + 0,6 \times (9 - 4)^2 = 66,4$.
- L’écart type vaut $\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{66,4} \approx 8,149$.

EXERCICE 3 (4 POINTS)

Un quartier résidentiel comprend 99 unités d’habitation ayant une valeur locative moyenne de 1000 euros. Deux nouvelles unités d’habitation sont construites dans le quartier : l’une a une valeur locative de 700 euros et l’autre, une villa luxueuse, a une valeur locative de 11 400 euros.

1. Quelle est la nouvelle moyenne de valeur locative pour le quartier?
2. Pouvait-on s'attendre à un tel résultat?

CORRECTION

1. La nouvelle moyenne de valeur locative pour le quartier est :

$$m = \frac{99 \times 1000 + 1 \times 700 + 1 \times 11400}{99 + 1 + 1} = 1100 \text{ euros.}$$

2. C'était attendu, la moyenne des deux nouvelles habitations est $\frac{11400 + 700}{2} = 6050$ euros, soit beaucoup plus que la moyenne des 99 premières.

EXERCICE 4 (6 POINTS)

Lors des 10 contrôles de mathématiques (notés sur 10), Tic n'a eu que des 5 et des 8 et Tac n'a eu que des 6 et des 9.

1. La propriété suivante est-elle vraie ou fausse? "Tac a une meilleure moyenne que Tic."
2. Soit x le nombre de 5 obtenus par Tic et y le nombre de 6 obtenus par Tac.
 - a. Exprimer la moyenne de Tic en fonction de x et celle de Tac en fonction de y .
 - b. Justifier que la moyenne de Tic est supérieure ou égale à celle de Tac si, et seulement si, $y \geq x + \frac{10}{3}$.
3.
 - a. Dans un repère orthonormé, représenter la droite d'équation $y = x + \frac{10}{3}$.
 - b. Pour combien de couples $(x; y)$ Tic a-t-il une meilleure moyenne que Tac?

CORRECTION

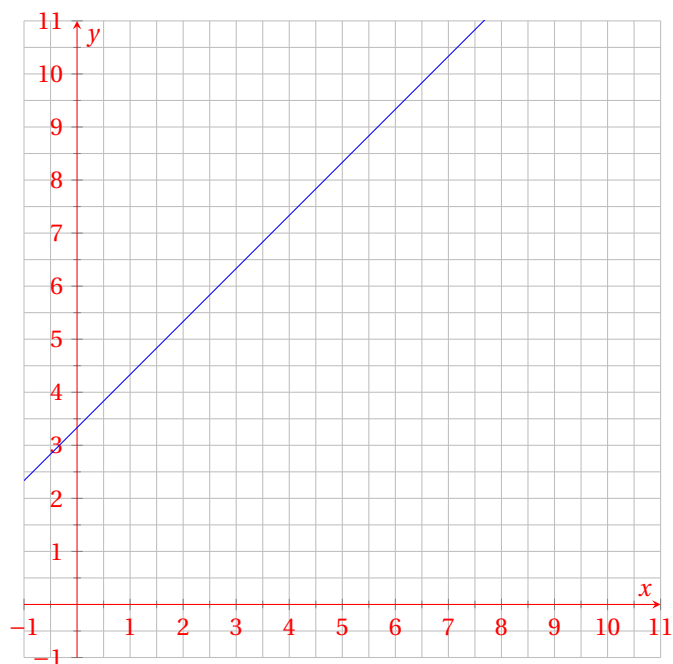
1.
 - Si Tic a dix 5 et aucun 8, sa moyenne est de 5 alors qu'avec dix 8 et aucun 5, elle est de 8.
 - De son côté, si Tac a dix 6 et aucun 9, sa moyenne est de 6 alors qu'avec dix 9 et aucun 6, elle est de 9.

Il est ainsi clair qu'on ne peut pas conclure sur la propriété sans connaître les effectifs pour chaque élève.

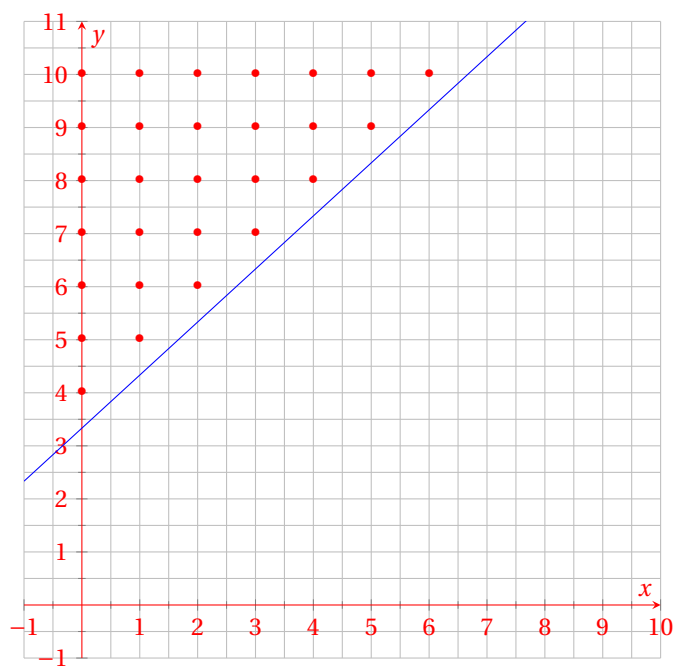
2.
 - a. $m_{tic} = \frac{5x + 8(10 - x)}{10}$ et $m_{tac} = \frac{6y + 9(10 - y)}{10}$.
 - b.

$$\begin{aligned}
 & m_{tic} \geq m_{tac} \\
 \Leftrightarrow & \frac{5x + 8(10 - x)}{10} \geq \frac{6y + 9(10 - y)}{10} \\
 \Leftrightarrow & 5x + 8(10 - x) \geq 6y + 9(10 - y) \\
 \Leftrightarrow & -3x + 80 \geq -3y + 90 \\
 \Leftrightarrow & -3x - 10 \geq -3y \\
 \Leftrightarrow & x + \frac{10}{3} \leq y
 \end{aligned}$$

3. a.



b. Nous allons indiquer dans le graphique précédent tous les points à coordonnées entières telles que $x + \frac{10}{3} \leq y$ et les compter.



Il y a 28 couples $(x; y)$ tels que Tic a une meilleure moyenne que Tac.