Classe : Terminale STI2D
Calculatrice : ✔
Durée : 1 heure

Devoir surveillé n°2

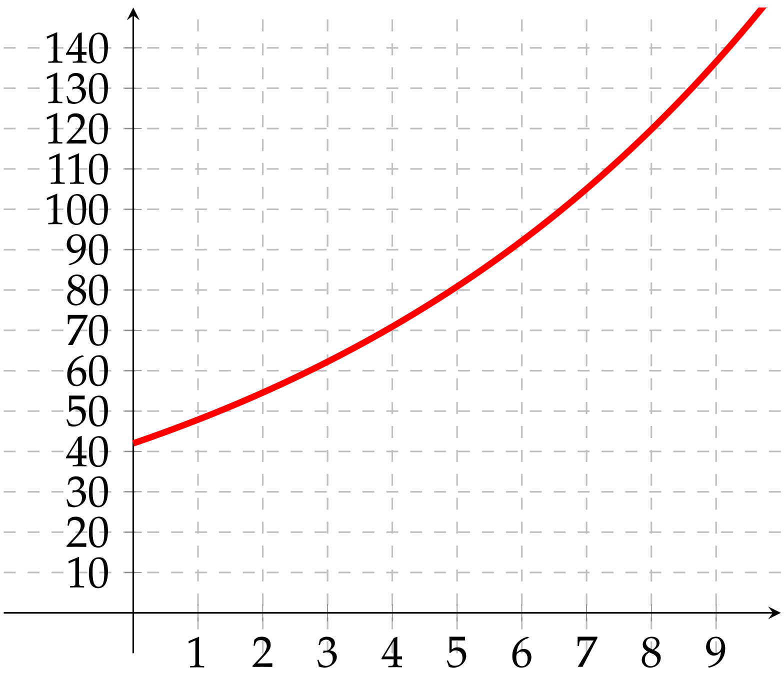
Exercice 1 | 10 points

En 2015, l'IDATE (Institut de l'audiovisuel et des télécommunications en Europe) estimait à 42 milliards le nombre d'objets connectés dans le monde avec une prévision de croissance de 14% par an jusqu'en 2025.
On considère la suite (u_n) où u_n modélise le nombre d'objets connectés (en milliards) au 1er décembre $(2015+n)$, n désignant un entier naturel.
On admet que $u_0 = 42$ et que le nombre d'objets connectés augmente chaque année de 14%.

1. **a)** Calculer u_1 et u_2. Arrondir à 0,001. Interpréter ces deux résultats.
b) Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
c) Exprimer u_n en fonction de n. En déduire une estimation du nombre d'objets connectés en 2025.
d) Ce modèle peut-il être prolongé raisonnablement jusqu'en 2050 ? Justifier la réponse.

2. Pour estimer à n'importe quel instant t le nombre de milliards d'objets connectés, on admet qu'on peut modéliser ce nombre par la fonction g définie sur $[0\,;10]$ par : $g(t) = 42 \times 1,14^t$ où t est le nombre d'années après le 1er décembre 2015.

La courbe représentative de la fonction g est donnée ci-contre.



a) Par lecture graphique, déterminer :
i le nombre d'objets connectés au bout de 4 ans et demi ;
ii au bout de combien de temps le nombre d'objets connectés dépasse les 100 milliards.

b) Par le calcul, déterminer :
i le nombre d'objets connectés le 1er déc 2019 ;
ii le nombre d'objets connectés le 1er mars 2020.

Correction

1. a) $u_1 = u_0 \times 1{,}14 = 42 \times 1{,}14 = 47{,}88$ donc le 1er décembre 2016, il y avait $\boxed{\text{47,88 milliards d'objets connectés}}$ dans le monde.

   $u_2 = u_1 \times 1{,}14 = 47{,}88 \times 1{,}14 \simeq 54{,}583$ donc le 1er décembre 2017, il y avait environ $\boxed{\text{54,583 milliards d'objets connectés}}$ dans le monde.

   b) (u_n) est une suite géométrique de raison $\boxed{q = 1{,}14}$ car on multiplie chaque année le nombre d'appareils par 1,14, d'où une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = 1{,}14u_n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

   c) On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n = u_0 \times q^n = 42 \times 1{,}14^n}$.

   Ainsi, au premier décembre 2025, il y aurait $\boxed{u_{10} = 42 \times 1{,}14^{10} \simeq 155{,}703 \text{ milliards}}$ d'objets connectés.

   d) Suivant ce modèle, on pourrait atteindre $u_{35} \simeq 4\,120{,}207$ milliards d'objets connectés dans le monde. Avec une population mondiale qui serait dans un ordre de grandeur autour de la dizaine de milliards d'être humains, on aurait environ $\boxed{\dfrac{4120}{10} = 412 \text{ appareils connectés par personne}}$ dans le monde, ce qui semble peu réaliste.

2. a) i Le nombre d'objets connectés au bout de 4 ans et demi : $\boxed{f(4{,}5) \simeq 75 \text{ milliards}}$.

   ii Au bout de combien de temps le nombre d'objets connectés dépasse les 100 milliards :
   $f(x) \geq 100$ pour $\boxed{x \geq 6{,}5}$, c'est-à-dire, au bout de 6 ans et demi.

   b) i Le nombre d'objets connectés le 1er déc 2019 : $\boxed{f(4) = 42 \times 1{,}14^4 \simeq 70{,}936 \text{ milliards}}$.

   ii Le nombre d'objets connectés le 1er mars 2020 : $\boxed{f(4{,}25) = 42 \times 1{,}14^{4{,}25} \simeq 73{,}298 \text{ milliards}}$.

Exercice 2 | 4 points

Résoudre dans $]0\,;+\infty[$ les équations suivantes.

1. $x^{0{,}25} = 4$
2. $x^{\frac{1}{3}} = 10$
3. $x^{-0{,}2} = 3$
4. $x^{-\frac{1}{4}} = 1{,}5$

Correction

1. Dans $\mathbb{R}_+$, $x^{0{,}25} = 4 \Leftrightarrow x = 4^{\frac{1}{0{,}25}} = 4^4 = 256$. $\boxed{\mathscr{S} = \{256\}}$

2. Dans $\mathbb{R}_+$, $x^{\frac{1}{3}} = 10 \Leftrightarrow x = 10^{\frac{1}{\frac{1}{3}}} = 10^3 = 1\,000$. $\boxed{\mathscr{S} = \{1\,000\}}$

3. Dans $\mathbb{R}_+$, $x^{-0{,}2} = 3 \Leftrightarrow x = 3^{-\frac{1}{0{,}2}} = 3^{-5} = \dfrac{1}{3^5} = \dfrac{1}{243}$. $\boxed{\mathscr{S} = \left\{\dfrac{1}{243}\right\}}$

4. Dans $\mathbb{R}_+$, $x^{-\frac{1}{4}} = 1{,}5 \Leftrightarrow x = 1{,}5^{-4} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{-4} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^4 = \dfrac{2^4}{3^4} = \dfrac{16}{81}$. $\boxed{\mathscr{S} = \left\{\dfrac{16}{81}\right\}}$

Exercice 3 | 6 points

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $1{,}01^x > 1{,}01^{3{,}5}$
2. $0{,}33^x \leqslant 0{,}33^{1{,}8}$
3. $0{,}68^{3x} \geqslant 0{,}68^6$
4. $1{,}4^{5x+1} < 1{,}4^{16}$

Correction

1. La fonction exponentielle $x \mapsto 1{,}01^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car 1,01 est strictement supérieur à 1.

   Ainsi, l'inéquation $1{,}01^x > 1{,}01^{3{,}5}$ est équivalente à $x > 3{,}5$. C'est-à-dire, $\boxed{\mathscr{S} =]3{,}5\,;+\infty[}$.
2. La fonction exponentielle $x \mapsto 0{,}33^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ car 0,33 est strictement inférieur à 1.

   Ainsi, l'inéquation $0{,}33^x \leqslant 0{,}33^{1{,}8}$ est équivalente à $x \geqslant 1{,}8$. C'est-à-dire, $\boxed{\mathscr{S} = [1{,}8\,;+\infty[}$.
3. La fonction exponentielle $x \mapsto 0{,}68^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ car 0,68 est strictement inférieur à 1.

   Ainsi, l'inéquation $0{,}68^{3x} \geqslant 0{,}68^6$ est équivalente à $3x \leqslant 6$. C'est-à-dire, $\boxed{\mathscr{S} =]-\infty\,;2]}$.
4. La fonction exponentielle $x \mapsto 1{,}4^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car 1,4 est strictement supérieur à 1.

   Ainsi, l'inéquation $1{,}4^{5x+1} < 1{,}4^{16}$ est équivalente à $5x + 1 < 16 \Leftrightarrow 5x < 15 \Leftrightarrow x < 3$. C'est-à-dire, $\boxed{\mathscr{S} =]-\infty\,;3[}$.