# 9

# INTÉGRATION

**Résumé**

La théorie de l'intégration est riche. Elle est tellement riche que ses applications se retrouvent dans presque tous les pans de l'analyse : calcul d'aires, détermination de primitives, probabilité, transformations de Fourier et Laplace...

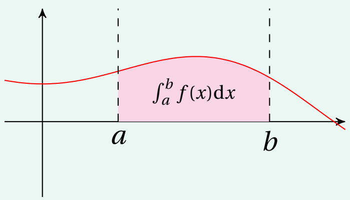
## 1 Intégration géométrique

**Attention**

Dans toute la section, $f$ désignera une fonction **continue** définie sur un intervalle **compact** de $\mathbf{R}$, c'est-à-dire, une fonction suffisamment régulière définie sur un $[a;b]$ où $a<b$ sont des réels.

**Définition | Intégrale d'une fonction positive sur un intervalle**

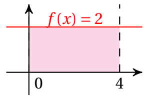
Supposons que $f$ est **positive**.
L'intégrale de $f$ entre $a$ et $b$ est le nombre réel **positif** correspondant à l'**aire sous la courbe** de $f$ entre $x=a$ et $x=b$.




On la note :

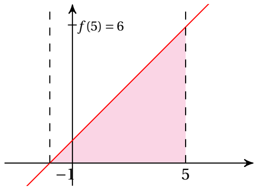
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

**Exemples** ▶ On peut calculer $\int_0^4 2\mathrm{d}x$ qui est l'aire sous la courbe de la fonction constante égale à 2 entre $x=0$ et $x=4$.



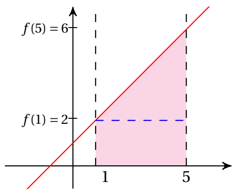

Elle correspond à l'aire d'un rectangle de longueur $4=4-0$ et de largeur 2, c'est-à-dire, $\int_0^4 2\mathrm{d}x=8$.

▶ Pour $\int_{-1}^5 (x+1)\mathrm{d}x$, nous avons à faire à l'aide d'un triangle de base $6=5-(-1)$ et de hauteur 6.




On obtient donc $\int_{-1}^5 (x+1)\mathrm{d}x=\dfrac{6\times 6}{2}=18$.

▶ Pour $\int_1^5 (x+1)\mathrm{d}x$, cette fois ci, c'est un trapèze qui nous intéresse. On peut calculer son aire en considérant le rectangle et le triangle mis en évidence.

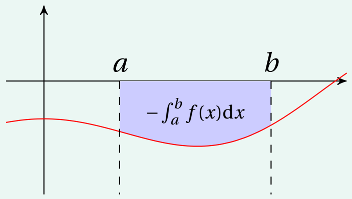



$$\int_2^5 (x+1)\mathrm{d}x = 4\times 2+\frac{4\times 4}{2}=8+8=16$$

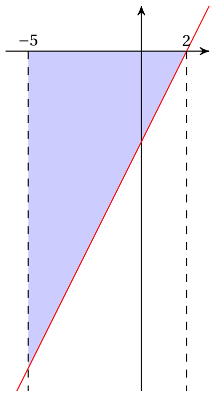
**Définition | Intégrale d'une fonction négative sur un intervalle**

Supposons que $f$ est **négative**.
L'intégrale de $f$ entre $a$ et $b$ est le nombre réel **négatif** correspondant à l'**aire algébrique sous la courbe** de $f$ entre $x = a$ et $x = b$.




Cette aire est l'opposée de l'**aire absolue** obtenue par un calcul d'aire classique et représentée au dessus.

**Exemple** $\int_{-5}^{2} (2x-4)\mathrm{d}x = -49$ car l'aire absolue sous la courbe est celle d'un triangle de base 7 et de hauteur $(2\times 2-4)-(2\times(-5)-4) = 14$ donc d'aire $\dfrac{7\times 14}{2} = 49$ mais le triangle est sous l'axe des abscisses : la fonction est négative sur $[-5;2]$.




**Propriétés**

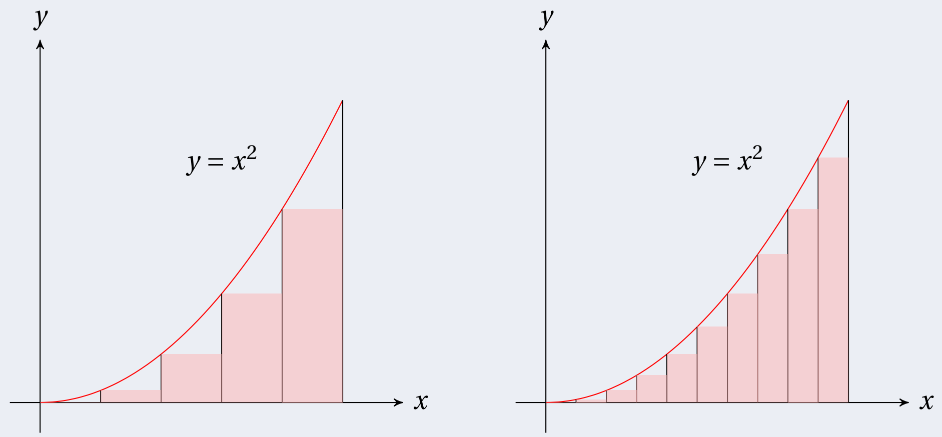
- Relation de Chasles : $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^x f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x$
- Anti-symétrie : $\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$
- Comparaison :

  Si $g \geqslant f$ sur $[a;b]$ alors $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

**Remarque** La relation de Chasles nous permet donc de gérer le cas des fonctions de signe quelconque. Il suffit de découper le domaine de définition de $f$ selon qu'elle soit positive ou négative est de sommer les aires algébriques associées.

**Méthode | Approche de l'intégrale par la méthode des rectangles**

On peut approcher l'intégrale d'une fonction $f$ en utilisant l'aire de rectangles sous la courbe de $f$. Ci-contre, la courbe de la fonction carré sur $[0;1]$.




En augmentant le nombre de rectangles, on approche de la valeur de l'aire.

**Exercice**

Déterminer les intégrales suivantes en se ramenant à des calculs d'aires relatives.

1. $\int_0^{10} 2x-4\mathrm{d}x$
2. $\int_{-1}^{1} x\mathrm{d}x$
3. $\int_{-3}^{3} x^3\mathrm{d}x$
4. $\int_4^7 3x+1\mathrm{d}x$

**Propriété | Linéarité**

Soient $f$ et $g$ définies sur $[a;b]$ ainsi que $k$ un réel.

- $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,\mathrm{d}x$
- $k \times \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b k f(x)\mathrm{d}x$

## 2 Primitives

**Définition | Primitive d'une fonction**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$.
On appelle **primitive** de $f$ toute fonction $F$ définie et dérivable sur $I$ telle que :

$$\forall x \in I, F'(x) = f(x).$$

**Remarques** ► Si une telle primitive existe alors il en existe une **infinité** car $G$ définie sur $I$ par $G(x) = F(x) + c$ où $c \in \mathbf{R}$ est encore une primitive de $f$.

► Une primitive d'une fonction $f$ est solution de l'équation différentielle $y' = f$.

**Exemple** Soit $f$ définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 4x$
La fonction $F$ définie sur $\mathbf{R}$ par $F(x) = x^3 - 2x^2 + 5$ est une primitive de $f$ car $F$ est dérivable et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $F'(x) = 3x^2 - 4x = f(x)$.

**Propriétés | Récapitulatif des primitives usuelles**

Dans le tableau suivant, $F$ est une primitive de $f$ et $C$ une constante réelle.

| $f(x)$ | $F(x)$ |
|---|---|
| $x^n$ | $\frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \geqslant 0)$ |
| $\frac{1}{x^n}$ | $-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C \quad (n \geqslant 2,\ x \neq 0)$ |
| $e^x$ | $e^x + C$ |
| $\frac{1}{\sqrt{x}}$ | $2\sqrt{x} + C \quad (x > 0)$ |

**Exercice**

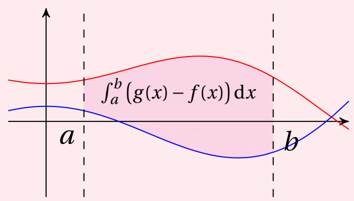
Déterminer les primitives de $f$ dans chacun des cas suivants, $f$ étant définie sur $I$.

1. $f(x) = -2x^3 + 3$ et $I = \mathbf{R}$
2. $f(x) = \mathrm{e}^{8x}$ et $I = \mathbf{R}$

## 3 Intégration plus avancée

**Propriété | Aire entre deux courbes**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur le même intervalle $[a;b]$ telles que $g \geqslant f$.
L'aire absolue entre les courbes de $f$ et $g$ ainsi que $x = a$ et $x = b$ correspond à l'intégrale $\int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)\,\mathrm{d}x$.




**Définition | Valeur moyenne**

On appelle **valeur moyenne** de $f$ entre $a$ et $b$ le nombre $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

**Remarque** C'est une extension de la moyenne algébrique $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ pour une série $x_1, \cdots, x_n$.

**Théorème | Existence d'une primitive**

Toute fonction $f$ continue sur un intervalle $I$ admet une unique primitive s'annulant en $a \in I$. On la note $F_a$ et on a :

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$$

**Théorème | Calcul primitif**

Soit $F$ une primitive de $f$ sur $[a;b]$.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = \left[F(x)\right]_a^b$$

*Démonstration.* $F$ et $F_a$ diffèrent d'une constante $c$ : $F = F_a + c$. Ainsi,

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F_a(b) + c - F_a(a) - c \\ &= \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + c - \int_a^a f(t)\mathrm{d}t - c \\ &= \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

□

**Remarque** Il est désormais extrêmement facile de calculer une intégrale pour des fonctions usuelles.

**Exemples**

- $\int_2^7 x + 4\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} + 4x\right]_2^7 = \left(\frac{7^2}{2} + 4\times 7\right) - \left(\frac{2^2}{2} + 4\times 2\right) = 42{,}5.$
- $\int_{-1}^3 \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = \left[\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\right]_{-1}^3 = \left(\frac{\mathrm{e}^{2\times 3}}{2}\right) - \left(\frac{\mathrm{e}^{2\times(-1)}}{2}\right) = \frac{\mathrm{e}^6}{2} - \frac{\mathrm{e}^{-2}}{2}.$

**Théorème | Intégration par parties**

Soient $f$ continue sur un intervalle $I$ de primitive $F$, $g$ dérivable sur $I$ et $a, b \in I$.

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \left[F(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\mathrm{d}x$$

*Démonstration.* $Fg$ est une primitive de $F'g + Fg' = fg + Fg'$. Ainsi :

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x + \int_a^b F(x)g'(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \left(f(x)g(x) + F(x)g'(x)\right)\mathrm{d}x = \left[F(x)g(x).\right]_a^b$$

□