8

Équations différentielles

Résumé

Dans ce chapitre, nous étudions un objet central pour la physique : les équations différentielles. Nous nous restreignons cependant au cas simple des *équations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients constants.*

1 Équations différentielles

Définition

On appelle **équation différentielle d'ordre 1** une équation d'inconnue y, une **fonction**, dans laquelle intervient y', sa dérivée.
Une **solution** f de cette équation différentielle est une fonction vérifiant l'égalité.

Exemples ► $y' + y = 0$ est une équation différentielle d'ordre 1.

On définit sur $\mathbf{R}$ des fonctions f et g par $f(x) = 12\exp(-x)$ et $g(x) = x^2 + 10$. On vérifie que pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$f'(x) + f(x) = -12\exp(-x) + 12\exp(-x) = 0 \text{ donc } \boxed{f' + f = 0}$$

mais

$$g'(x) + g(x) = 2x + x^2 + 10 = x^2 + 2x + 10 \neq 0 \text{ donc } \boxed{g' + g \neq 0.}$$

f est une solution de $y' + y = 0$ mais g n'en est pas une.

► $(y')^2 = 4y$ est aussi une équation différentielle d'ordre 1. La fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^2$ est une solution.

En effet, $(f'(x))^2 = (2x)^2 = 4x^2$ et $4f(x) = 4x^2$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ donc $\boxed{(f')^2 = 4f.}$

Remarques ► On peut définir des équations différentielles d'ordres supérieurs. C'est-à-dire, des équations différentielles mettant en œuvre des dérivées de y d'ordres supérieurs comme la dérivée seconde $y'' = (y')'$, la dérivée tierce $y''' = (y'')'$ et les dérivées successives suivantes qu'on note $y^{(n)}$.

► Une équation différentielle peut s'écrire de différentes manières suivant le contexte ou le problème.

Ainsi, on peut écrire $4y' - 2y = 2$ des manières suivantes.

▷ $4\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) - 2y(t) = 2$ qui est utilisée quand y est une fonction de plusieurs variables : temps, espace, angle, …

▷ $4y'(t) - 2y(t) = 2$ utilisée généralement pour des problèmes en physique ou en chimie.

▷ $4y'(x) - 2y(x) = 2$ pour des exercices plutôt mathématiques.

Exemple Soit $\omega \in \mathbf{R}^*$.
$y'' + \omega^2 y = 0$ est une équation différentielle d'ordre 2.

2 Équations différentielles de la forme $y' = ay + b$

Théorème

Soient $a \in \mathbf{R}^*$ et $b \in \mathbf{R}$ des coefficients constants.
L'équation différentielle $y' = ay + b$ admet comme uniques solutions définies sur $\mathbf{R}$, les fonctions f sous la forme suivante où C est une constante réelle

$$f(x) = C\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}.$$

Démonstration. Démontrons que ces fonctions là sont bien des solutions sur $\mathbf{R}$ de $y' = ay + b$.
Soit $C \in \mathbf{R}$ et f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = C\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}$.
On calcule f' d'une part et $af + b$ de l'autre. Soit x réel.

$$f'(x) = \boxed{aC\mathrm{e}^{ax}}$$

$$\begin{aligned} af(x) + b &= a\left(C\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}\right) + b \\ &= aC\mathrm{e}^{ax} - b + b \\ &= \boxed{aC\mathrm{e}^{ax}} \end{aligned}$$

f est bien solution de $y' = ay + b$. □

Exemples ► Les solutions f de $y' = 5y + 10$ sont définies sur $\mathbf{R}$ sous la forme $\boxed{f(x) = Ce^{5x} - 2}$. En effet, $a = 5$ et $b = 10$.

► On considère l'équation différentielle $6y' - 4y = 8y' + 8$. Elle peut se réécrire :

$$\begin{aligned} 6y' - 4y &= 8y' + 8 \\ \Leftrightarrow -2y' &= 4y + 8 \\ \Leftrightarrow y' &= -2y - 4 \end{aligned}$$

Ainsi, les solutions f de $6y' - 4y = 8y' + 8$ sont définies sur $\mathbf{R}$ sous la forme $\boxed{f(x) = Ce^{5x} - 2}$. En effet, $a = 5$ et $b = 10$.

Théorème | Problème de Cauchy

On définit parfois des équations différentielles avec une condition initiale $y(0) = y_0 \in \mathbf{R}$. C'est ce qu'on appelle un **problème de Cauchy**.
Soient $a \in \mathbf{R}^*$, $b \in \mathbf{R}$ et $y_0 \in \mathbf{R}$.
L'équation différentielle $\begin{cases} y' = ay + b \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ admet une **unique** fonction f solution définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(x) = \left(y_0 + \frac{b}{a}\right) e^{ax} - \frac{b}{a}.$$

Exemple Soit le problème de Cauchy suivant.

$$\begin{cases} y' = -3y + 9 \\ y(0) = 6 \end{cases}$$

L'unique solution f est définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \left(6 + \dfrac{9}{-3}\right) e^{-3x} - \dfrac{9}{-3} = 3e^{-3x} + 3$.