7

NOMBRES COMPLEXES

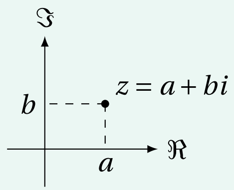
Résumé

L'équation $x^2 + 1 = 0$ n'admet pas de solution réelle. On introduit une solution "imaginaire" qui va bouleverser la manière de représenter un plan et la géométrie elle même.

1 Rappels

Définitions | Ensemble des nombres complexes

Un **nombre complexe** z peut être écrit sous la *forme algébrique* $z = a + ib$, où a et b sont des nombres réels, et i est l'unité imaginaire définie comme $i^2 = -1$.



L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

Remarques

- Pour $z = a + ib$, $a = \Re(z)$ est la **partie réelle** de z et $b = \Im(z)$ est la **partie imaginaire** de z.
- On peut identifier tout point $M(a;b)$ du plan avec le complexe $z = a + ib$. On dit que M est d'**affixe** z.

Propriétés

Soient $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$.

- $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$
- $z_1 \times z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$

Exercice

Soient $z = 3 - 2i$ et $w = 6 + i$. Calculer $z + w$ et zw.

Définitions

Soit $z = a + ib$.

- On note $\overline{z} = a - ib$ le **conjugué** de z.
- On note $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ le **module** de z.

Propriétés

Soit $z = a + ib$.

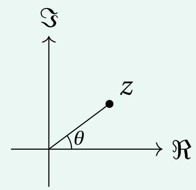
- $z\overline{z} = |z|^2$
- $\dfrac{z + \overline{z}}{2} = \Re(z)$
- $\dfrac{z - \overline{z}}{2i} = \Im(z)$

Remarque On peut se servir du conjugué pour calculer des quotients.
Soient $z = 1 - 3i$ et $w = 2 + i$.

$$\frac{1-3i}{2+i} = \frac{z}{w} = \frac{z\overline{w}}{w\overline{w}} = \frac{z\overline{w}}{|w|^2} = \frac{(1-3i)(2-i)}{2^2+1^2} = \frac{-1-7i}{5} = -\frac{1}{5} - \frac{7}{5}i$$

Définition | Argument

Soit $z \in \mathbb{C}$ affixe d'un point M du plan dans un repère orthonormé $(O; I; J)$.
On appelle **argument** de z, l'angle orienté $\widehat{IOM}$, souvent noté θ ou $\arg(z)$.



Remarque La donnée de $\arg(z)$ et $|z|$ permet de placer le point M d'affixe z sans les coordonnée cartésiennes $(a;b)$.
On appelle le couple $(|z|;\arg(z))$ les coordonnées polaires de M.

Définition | Forme trigonométrique

On apelle **forme trigonométrique** de $z \in \mathbf{C}$ l'écriture suivante :

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

où $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$.

Exercice

Déterminer les formes trigonométriques des nombres complexes suivants.

1. $z = 3 - 3i$

2. $z = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$

3. $z = -7 - 7\sqrt{3}i$

4. $z = i$

2 Forme exponentielle et applications

Théorème

Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Définition | Forme exponentielle

On apelle **forme exponentielle** de $z \in \mathbf{C}$ l'écriture suivante :

$$z = re^{i\theta}$$

où $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$.

Exercice

Déterminer les formes exponentielles des nombres complexes suivants.

1. $z = -3 - 3i$

2. $z = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$

3. $z = -7 + 7\sqrt{3}i$

4. $z = -10i$

Remarque

$$-1 = e^{i\pi}$$

Propriétés

Soient $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$.

- $z \times z' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$
- $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$
- $\overline{z} = e^{-i\theta}$

Exercice

Soient $z = 4e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $w = \dfrac{1}{2}e^{-2i\frac{\pi}{3}}$.

Calculer zw, z^2 et $\dfrac{z}{w}$.

Théorème | Formules d'addition

Soient a et b deux réels.

- $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$
- $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$
- $\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$
- $\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$

Démonstration. On sait que $\cos x = \Re\left(e^{ix}\right)$ et $\sin x = \Im\left(e^{ix}\right)$.
Pour le premier point, on a :

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \Re\left(e^{i(a+b)}\right)\\ &= \Re\left(e^{ia}e^{ib}\right)\\ &= \Re\left(e^{ia}\right)\Re\left(e^{ib}\right) - \Im\left(e^{ia}\right)\Im\left(e^{ib}\right)\\ &= \cos a\cos b - \sin a\sin b.\end{aligned}$$

□

Corollaire | Formules de duplication

Soit a un réel.

- $\cos(2a) = \cos^2 a - \cos^2 b = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$
- $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$

Démonstration. Théorème précédent avec $a = b$ et utilisation de $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$. □

Corollaire | Formules de linéarisation

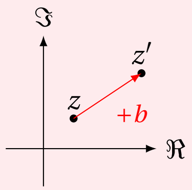
Soit a un réel.

- $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}$
- $\sin^2 a = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}$

3 Transformations du plan

Propriété | Translation

Soit $b \in \mathbf{C}$.
La transformation géométrique qui à M point du plan d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = z + b$ est la **translation** de vecteur $\vec{w}$ d'affixe b.

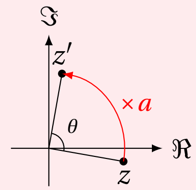


Exemples

- Une translation de vecteur $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ revient à ajouter $2+3i$ aux affixes.
- Une translation de vecteur $\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$ revient à soustraire $2i$ aux affixes.

Propriété | Rotation

Soit $a \in \mathbf{C}$ de module 1 tel que $a = e^{i\theta}$.
La transformation géométrique qui à M point du plan d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = az = e^{i\theta} \times z$ est la **rotation** d'angle θ et de centre l'origine du repère.



Exemples

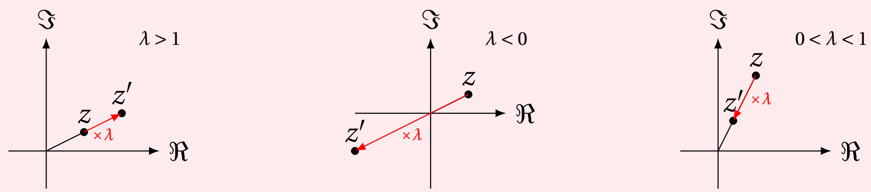
- Une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ est une multiplication par i.
- Une rotation d'angle $-\frac{\pi}{4}$ est une multiplication par $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

Exercice

Soient $z = 2+i$ et $z' = \frac{-1-2\sqrt{3}}{2} + \frac{2-\sqrt{3}}{2}i$. Déterminer l'angle de la rotation permettant de passer de z à z'.

Propriété | Homothétie

Soit λ un nombre **réel** non nul.
La transformation géométrique qui à M point du plan d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = \lambda z$ est l'**homothétie** de rapport λ et de centre l'origine du repère.



Exercice

Montrer qu'une homothétie de rapport -1 est une rotation d'angle π.