6

FONCTION EXPONENTIELLE

Résumé

Nous nous intéressons, ici, à une fonction exponentielle particulière. Elle est tellement importante qu'on l'appelle sobrement *exponentielle*.

1 Solution d'équation différentielle

Théorème | Existence et unicité

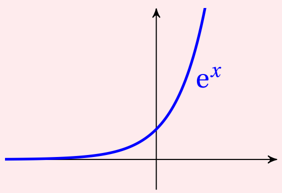
Il existe une unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbf{R}$ telle que :

$$\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1. \end{cases}$$

On l'appelle **fonction exponentielle** et on la note $f = \exp$.

Propriété | Fonction exponentielle de base e

Il existe un nombre $\mathrm{e} \approx 2{,}718$, appelé le **nombre d'Euler**, tel que exp est la fonction exponentielle de base e.



Propriétés

Soient $x, y \in \mathbf{R}$:

- $\mathrm{e}^0 = 1$
- $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^y$
- $\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y} = \mathrm{e}^{x-y}$
- $(\mathrm{e}^x)^y = \mathrm{e}^{xy}$

Démonstration. On obtient toutes ces propriétés de l'étude des fonctions exponentielles. □

Propriété | Variations de exp

$\exp : x \mapsto \mathrm{e}^x$ est **strictement croissante** sur $\mathbf{R}$.

Démonstration. $\mathrm{e} > 1$. □

Théorème | Positivité de exp

Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\exp(x) > 0$.

2 Dérivation et primitives

Théorème | Dérivation et primitives de composées linéaires

Soit $k \in \mathbf{R}^*$ et $f : x \mapsto \mathrm{e}^{kx}$.

- f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et $f(x) = k\mathrm{e}^{kx}$.
- f admet une primitive F sur $\mathbf{R}$ d'expression $F(x) = \dfrac{1}{k}\mathrm{e}^{kx}$.

Exemples

- $f : x \mapsto 12\mathrm{e}^{\frac{x}{3}}$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et $f'(x) = 4\mathrm{e}^{\frac{x}{3}}$.
- $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-13x}(x^2+2)$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -13\mathrm{e}^{-13x}(x^2+2) + \mathrm{e}^{-13x} \times 2x \\ &= e^{-13x}\left(-13x^2 + 2x - 26\right). \end{aligned}$$

Exercice

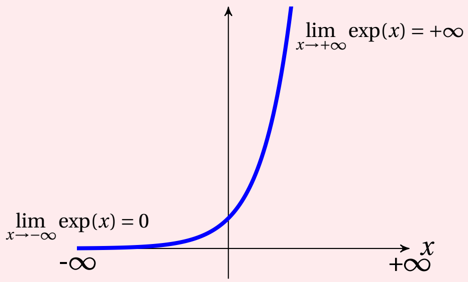
Déterminer une primitive des fonctions suivantes.

1. $f : x \mapsto 20e^{10x}$
2. $f : x \mapsto -e^{-3x} + 2$
3. $f : x \mapsto e^{-x} + e^{x} - 4x^4 + 2x^3$

3 Comportement asymptotique

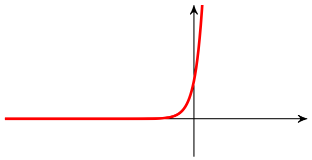
Propriété | Limite en $\pm\infty$

La fonction exponentielle dispose des limites suivantes pour $x \to \pm\infty$.

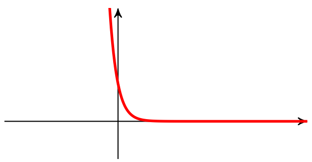


Exemples On dispose des limites suivantes :

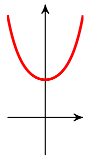
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(5x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} 5x = +\infty$.



- $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(-5x) = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} -5x = -\infty$.



- $\lim\limits_{x\to\infty} \exp\left(5x^2\right) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$.



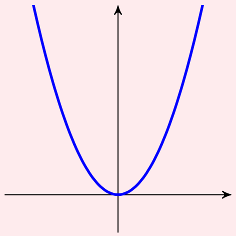
Exercice

Donner les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(4x-1)$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(-x+7)$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp\left(5x^2\right)$

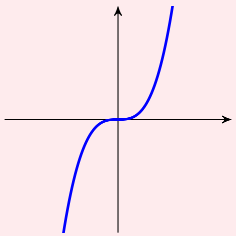
Propriétés | Limites de monômes

- Si $f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbf{N}^*$ **pair**, alors :



  - $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = +\infty$
  - $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$.

- Si $f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbf{N}$ **impair**, alors :



  - $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$
  - $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$.

Théorème | Limites de polynômes

La limite d'un polynôme $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ en $\pm\infty$ est celle de son terme dominant $a_n x^n$ (pour $a_n \neq 0$).

Exemples

- $\lim\limits_{x\to-\infty} 5x^3 - 12x^2 - x + 2 = \lim\limits_{x\to-\infty} 5x^3 = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} -x^2 + 10x = \lim\limits_{x\to+\infty} -x^2 = -\infty$

Théorème | Croissances comparées

Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n \mathrm{e}^x = 0$

Exemples

- Déterminons $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 + \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^3}$.

  D'une part, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et d'une autre, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^3} = +\infty$ par le théorème des croissances comparées. En faisant la somme, nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 + \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^3} = +\infty$.

- Déterminons $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^t - t$.

  Nous sommes face à une *forme indéterminée* car $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^t = \lim\limits_{t\to+\infty} t = +\infty$ mais $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^t - t$ ne vaut pas forcément 0 !

  Factorisons :

$$\begin{aligned} e^t - t &= e^t\left(1 - \frac{t}{\mathrm{e}^t}\right) \\ &= e^t\left(1 - t\mathrm{e}^{-t}\right). \end{aligned}$$

  Ainsi, comme $\lim\limits_{t\to+\infty} 1 - t\mathrm{e}^{-t} = 1$ par croissances comparées, on a par produit que $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^t - t = +\infty \times 1 = +\infty$.

Exercice

Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} 3\mathrm{e}^{4x} + 5x^2$
2. $\lim\limits_{t\to-\infty} -2t\mathrm{e}^{2t}$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-3x}}{x^2 + 2x}$