5

FONCTION EXPONENTIELLE DE BASE a

Résumé

Dans ce court chapitre, on propose de généraliser les calculs de puissances (ou plutôt exponentiels) à des exposants réels et non plus seulement entiers relatifs.

1 Introduction et premières propriétés

Définition | Exponentielle de base a

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $a > 0$ et de premier terme 1.
On peut prolonger (u_n) en une fonction f : la **fonction exponentielle de base a**.
Cette fonction est définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(x) = a^x.$$

On prend la convention $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$ si $x \leqslant 0$.

Propriétés

Les propriétés connues du calcul exponentiel sont toujours vraies.
Soient $a, b \in \mathbf{R}_+^*$ et $x, y \in \mathbf{R}$:

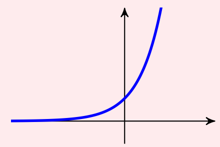
- $a^x a^y = a^{x+y}$
- $a^x b^x = (ab)^x$
- $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $(a^x)^y = a^{xy}$

2 Variations et comportement asymptotique

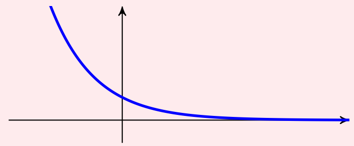
Propriétés | Variations d'une fonction exponentielle

Soit f la fonction exponentielle de base $a > 0$.

- Si $a > 1$, alors f est strictement **croissante** sur $\mathbf{R}$.



- Si $0 < a < 1$, alors f est strictement **décroissante** sur $\mathbf{R}$.



Exemples

- Soit f d'expression $f(x) = 2^x$. f est strictement croissante car sa base est strictement supérieur à 1.
- Soit f d'expression $f(x) = \left(\dfrac{7}{8}\right)^x$. f est strictement décroissante car sa base est strictement comprise entre 0 et 1.
- Soit f d'expression $f(x) = -3 \times 5^x$. f est strictement décroissante car $x \mapsto 5^x$ est strictement croissante.

Exercice

Donner les variations des fonctions suivantes définies sur $\mathbf{R}$.

1. $f : x \mapsto 5 \times 9^x$
2. $g : x \mapsto -2 \times 0{,}6^x$
3. $h : x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$

Exercice

Résoudre dans $\mathbf{R}$ les inéquations suivantes.

1. $5^x < 5^{12}$

2. $3^x \geqslant 9$

3. $0{,}8^{2x} < 0{,}8^{5x-1}$

4. $\left(\frac{6}{7}\right)^7 \leqslant \left(\frac{6}{7}\right)^{2-x}$

Propriétés | Limites en $\pm\infty$

- Si $a > 1$, alors on a :
  - $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$
    Les images $f(x)$ tendent vers l'infini si x parcourt la droite réelle en croissant.
  - $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$
    Les images $f(x)$ tendent vers 0 si x parcourt la droite réelle en décroissant.
- Si $0 < a < 1$, alors on a :
  - $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$
    Les images $f(x)$ tendent vers 0 si x parcourt la droite réelle en croissant.
  - $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$
    Les images $f(x)$ tendent vers l'infini si x parcourt la droite réelle en décroissant.

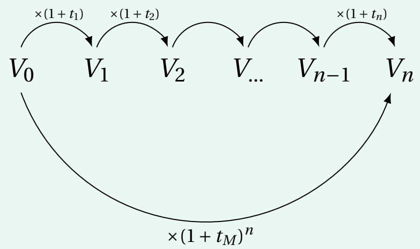
Exemples

- $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} -2^x = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} 10\times\left(\frac{2}{3}\right)^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} 9^x = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \pi\times 9^x = 0$

3 Application au taux moyen

Définitions

- Lors de n évolutions successives à des taux $t_1, t_2, \dots, t_n$ entre une valeur initiale V_0 et une valeur finale V_n, on appelle **taux d'évolution** moyen le taux noté t_M, qu'il faut appliquer n fois successivement à la valeur V_0 pour obtenir la valeur V_n.



- $$(1+t_M)^n = (1+t_1)(1+t_2)\cdots(1+t_n)$$

Propriété

- Calculer un taux moyen revient à résoudre une équation du type : $x^n = CM$ où $CM > 0$ est le **coefficient multiplicateur** global et n un entier naturel.
- Cette équation a pour unique solution réelle : $x = CM^{\frac{1}{n}}$.

Exercice

Résoudre dans $\mathbf{R}$ les équations $x^4 = 12$ et $y^9 = 3{,}2$.