4

TRIGONOMÉTRIE

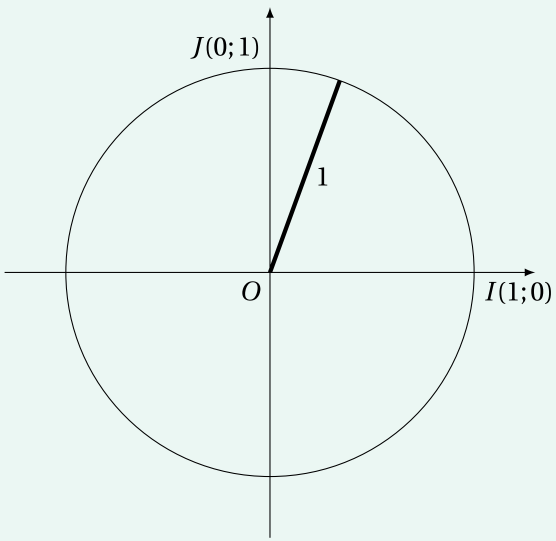
Résumé

Dans ce chapitre, nous revoyons la trigonométrie de base vue en classe de première et nous ajoutons quelques propriétés de calcul, indispensables en physique notamment.

1 Cercle trigonométrique

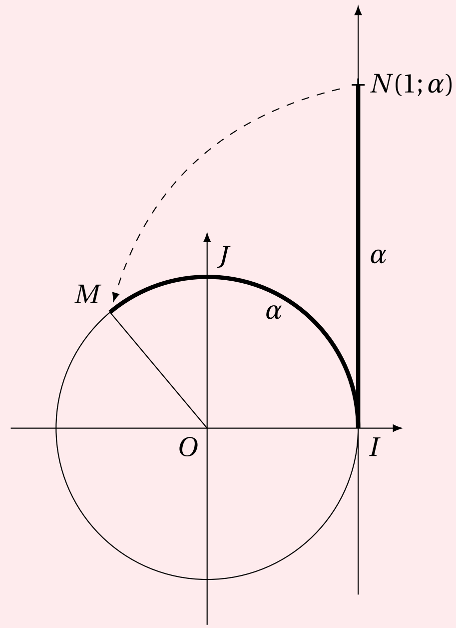
Définition

Dans un repère orthonormé $(O; I; J)$, on appelle **cercle trigonométrique** le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1, c'est-à-dire l'ensemble des points $M(a; b)$ tels que $a^2 + b^2 = 1$.



Propriété | Enroulement de la droite des réels sur le cercle

Soit d la droite verticale d'équation $x = 1$ et $N(1; \alpha)$ un point de d.

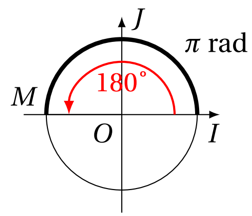


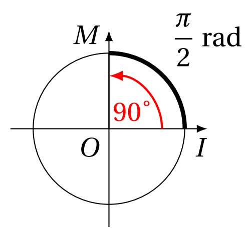
En *enroulant dans le sens anti-horaire* la droite d autour de $\mathscr{C}$, on obtient une **correspondance** entre N et un unique point M du cercle.

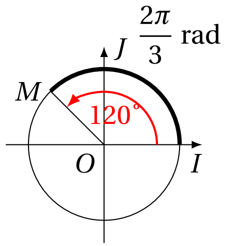
α est appelé **mesure en radian** de l'angle $\widehat{IOM}$.

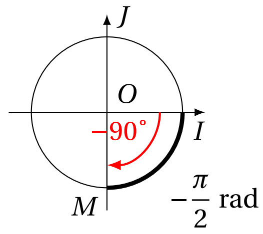
Remarque En considérant le périmètre de $\mathscr{C}$, un tour complet autour du cercle trigonométrique correspond au réel $\alpha = 2\pi$.

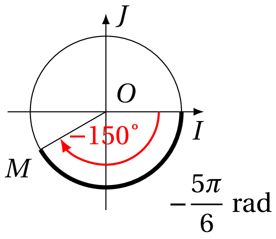
Exemples Donnons des mesures en radian pour quelques angles $\widehat{IOM}$.

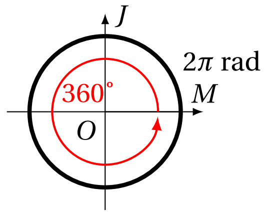








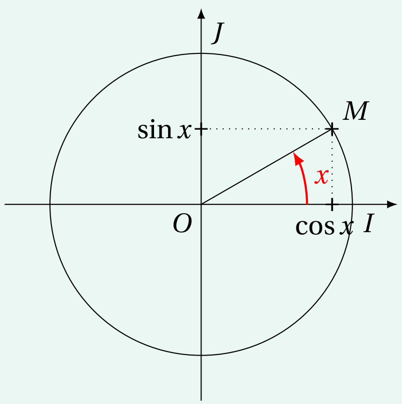




2 Cosinus et sinus d'un angle

Définitions

Soit M un point du cercle trigonométrique et x une mesure en radian de l'angle $\widehat{IOM}$.
On appelle **cosinus** de x l'abscisse de M et **sinus** de x l'ordonnée de M.



On note $M(\cos x ; \sin x)$.

Propriétés

Soit x un réel.

- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$
- $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$

Démonstration.
- Le premier point découle de l'équation du cercle trigonométrique

$$x^2 + y^2 = 1.$$

- Le second point vient du fait que les abscisses et ordonnées d'un point M du cercle trigonométrique sont bornées par -1 et 1 sinon on aurait $x^2 + y^2 > 1$.
- C'est trivial par construction de cos et sin.

□

Propriété | Valeurs particulières

Soit α exprimé en radian.

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

3 Études des fonctions cos et sin

Définitions | Fonctions cos et sin

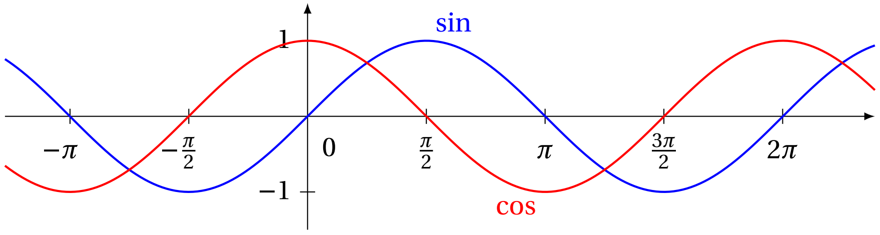
- La fonction **cosinus**, notée cos, est définie sur $\mathbf{R}$ par $x \longmapsto \cos x$.
- La fonction **sinus**, notée sin, est définie sur $\mathbf{R}$ par $x \longmapsto \sin x$.

Les propriétés trigonométriques vues dans la section précédente permettent d'énoncer plusieurs propriétés sur ces deux fonctions.

Propriétés

- La fonction cos est **paire**.
- La fonction sin est **impaire**.
- cos et sin sont **périodiques** de période 2π.
  C'est-à-dire, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\cos(x+2\pi) = \cos x$ et $\sin(x+2\pi) = \sin x$.

Remarque Par parité et périodicité, connaître les valeurs de $\cos x$ et $\sin x$ sur $[0;\pi]$ permet de connaître toutes leurs valeurs sur $\mathbf{R}$ et de construire leurs courbes représentatives.



Théorème | Fonctions dérivées

- La fonction cos est dérivable sur $\mathbf{R}$ et $\cos' = -\sin$.
- La fonction sin est dérivable sur $\mathbf{R}$ et $\sin' = \cos$.

4 Formules d'addition

Théorème | Addition

Soient a et b deux réels.

- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$
- $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$

Exemple

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

Remarque Nous aurons parfois besoin de transformer une expression trigonométrique $a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$ en $A\cos(\omega t+\phi)$.

Faisons-le pour $f(t) = \cos(3t) + \sqrt{3}\sin(3t)$.

$$\begin{aligned}A\cos(\omega t+\phi) &= A\big(\cos(\omega t)\cos(\phi) - \sin(\omega t)\sin(\phi)\big)\\ &= A\cos(\omega t)\cos(\phi) - A\sin(\omega t)\sin(\phi)\end{aligned}$$

Nous devons identifier les variables.

$$\begin{aligned} & f(t) = A\cos(\omega t+\phi)\\ \Leftrightarrow\ & \cos(3t) + \sqrt{3}\sin(3t) = A\cos(\omega t)\cos(\phi) - A\sin(\omega t)\sin(\phi)\\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} \omega = 3\\ A\cos(\phi) = 1\\ A\sin(\phi) = \sqrt{3}\end{cases}\end{aligned}$$

Enfin, pour $A = 2$ et $\phi = \frac{\pi}{4}$, nous avons bien :

$$f(t) = \cos(3t) + \sqrt{3}\sin(3t) = A\cos(\omega t+\phi) = 2\cos\left(3t+\frac{\pi}{4}\right).$$