3

SUITES ARITHMÉTIQUES ET GÉOMÉTRIQUES

Résumé

Nous créons ici un catalogue de suites numériques usuelles. Les suites arithmétiques, qui modélisent des croissances linéaires, et les suites géométriques, pour des croissances exponentielles, sont toutes désignées.

1 Suites arithmétiques

Définition

Soient $r \in \mathbf{R}$ et (u_n) une suite numérique définie sur $\mathbf{N}$ par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

(u_n) est appelée **suite arithmétique** de **raison** r.

Exemples ▶ Les deux suites suivantes sont arithmétiques, respectivement de raison de 2,3 et -1 :

$$\begin{cases} u_0 = 12 \\ u_{n+1} = u_n + 2{,}3 \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{N} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_0 = 10 \\ v_{n+1} = v_n - 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{N} \end{cases}$$

▶ Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 3 et de premier $u_0 = -5$.

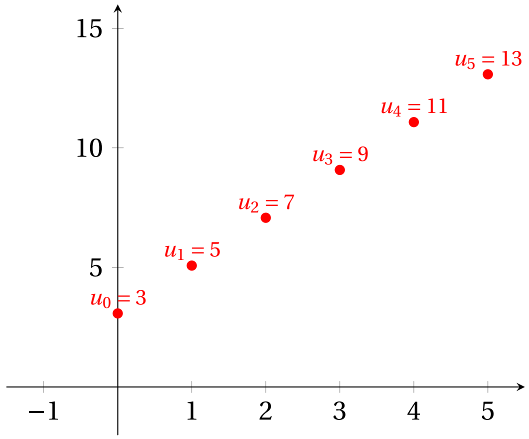
Alors, $u_1 = u_0 + 3 = -5 + 3 = -2$. De même, $u_2 = u_1 + 3 = 1$. On peut continuer indéfiniment : $u_3 = 4$, $u_4 = 7$, $u_5 = 10, \ldots$

Propriété

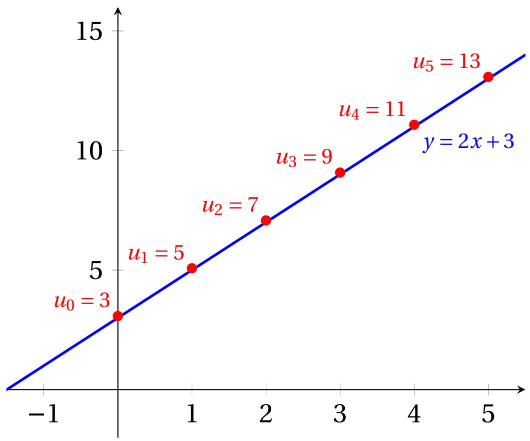
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est arithmétique de raison r et de premier terme u_0 si, et seulement si, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_n = u_0 + nr.$$

Exemple Représentons la suite arithmétique (u_n) de raison 2 et de premier terme 3.



La forme explicite de (u_n) est : $u_n = 2n + 3$ si $n \in \mathbf{N}$. Il est ainsi cohérent de constater que les représentations de (u_n) et de la fonction affine f d'expression $f(x) = 2x + 3$ coïncident sur $\mathbf{N}$.



Théorème | Termes consécutifs

x, y et z sont trois **termes consécutifs** d'une suite arithmétique si $\dfrac{x+z}{2} = y$.

Propriété | Somme des premiers termes

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.
On peut calculer $S_n = u_0 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ la somme des $n+1$ premiers termes par la formule suivante :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{u_0 + u_n}{2} \times (n+1)$$

Exemple Calculons $S = 1+3+5+\cdots+21$. Cette somme correspond à la somme des 11 premiers termes de la suite arithmétique de raison 2 et de premier terme 1.
$S = \dfrac{1+21}{2} \times 11 = 11^2 = 121$.

Remarque On peut calculer la somme des entiers de 1 à n pour $n \in \mathbf{N}^*$ grâce à la propriété précédente. Ainsi,

$$1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

2 Suites géométriques

Définition

Soient $q \neq 0$ et (u_n) une suite numérique définie sur $\mathbf{N}$ par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = q \times u_n.$$

(u_n) est appelée **suite géométrique** de **raison** q.

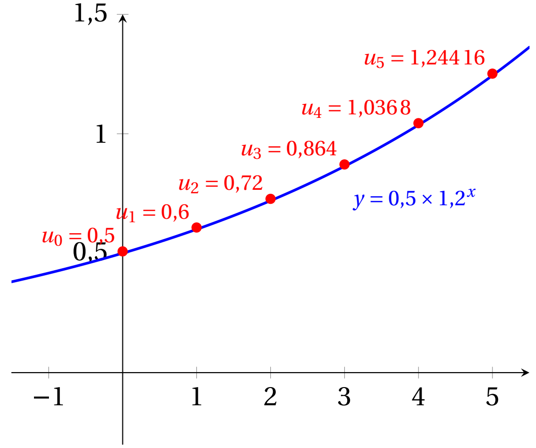
Exemple Soit (u_n) une suite géométrique de raison 2 et de premier $u_0 = 1{,}3$.
Alors, $u_1 = 2 \times u_0 = 2 \times 1{,}3 = 2{,}6$. De même, $u_2 = 2 \times u_1 = 5{,}2$. On peut continuer indéfiniment : $u_3 = 10{,}4$, $u_4 = 20{,}8$, $u_5 = 41{,}6$, ...

Propriété

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est géométrique de raison q et de premier terme u_0 si, et seulement si, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Exemple Représentons la suite géométrique (u_n) de raison 1,2 et de premier terme 0,5.



Théorème | Termes consécutifs

x, y et z **positifs** sont trois **termes consécutifs** d'une suite géométriques si $\sqrt{xz} = y$.

Propriété | Somme des premiers termes

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme u_0.
On peut calculer $S_n = u_0 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ la somme des $n+1$ premiers termes par la formule suivante :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Exemple Calculons $S = 1+2+4+8+\cdots+2048$. Cette somme correspond aux 12 premiers termes d'une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme 1.
Ainsi, $S = \dfrac{1-2^{12}}{1-2} = \dfrac{1-4096}{1-2} = 4095$.