2

Fonction inverse

Résumé

L'année dernière, la théorie de la dérivation a été présentée ainsi que l'étude de fonctions polynomiales. Ce chapitre va consister en l'étude de la fonction inverse via la théorie de la dérivation afin d'élargir notre catalogue de fonctions usuelles.

1 Rappels

1.1 Fonction dérivée

Définition | Nombre dérivé

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$ un nombre **fixé**.
Considérons, pour $h \neq 0$, le taux d'accroissement $\tau(h)$ de f entre a et $a+h$:

$$\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Si, quand h prend des valeurs infiniment proches de 0 ($h \to 0$), $\tau(h)$ se stabilise autour d'une valeur limite, alors on dira que f est **dérivable en** a. La valeur limite est appelée **nombre dérivé** de f en a, notée $f'(a)$.

On note :

$$\lim_{h\to 0} \tau(h) = f'(a).$$

Exemple Soit f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 7x + 1$. Calculons $f'(3)$.

Soit $h \neq 0$. On a :

$$\tau(h) = \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \frac{\left(2\times(3+h)^2 - 7\times(3+h)+1\right) - \left(2\times 3^2 - 7\times 3 + 1\right)}{h}$$

On développe et on réduit au numérateur, puis on simplifie par h qui est non nul.

$$\begin{aligned}\tau(h) &= \frac{2h^2+5h}{h}\\ &= 2h+5\end{aligned}$$

Quand h tend vers 0, alors les valeurs de $2h+5$ tendent vers 5. Ainsi, $f'(3) = 5$ car $\lim_{h\to 0} \tau(h) = 5$.

Propriété | Fonction dérivée

f' est appelée la **fonction dérivée** de f.
On a les dérivées de fonctions polynomiales, toutes dérivables sur $\mathbf{R}$.

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^n	nx^{n-1}

Remarque On peut aussi rappeler la dérivée de la fonction racine carrée définie sur $\mathbf{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

f est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

1.2 Propriétés et applications

Propriété | Linéarité

La dérivation est **linéaire**. C'est-à-dire que si $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, sur des intervalles communs de dérivabilité :

$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'.$$

Propriété | Produit

Soient f et g deux fonctions définies et dérivables sur I.
La fonction $f \times g$ est dérivable sur I et on a $(fg)' = f'g + g'f$.

Théorème | Quotient

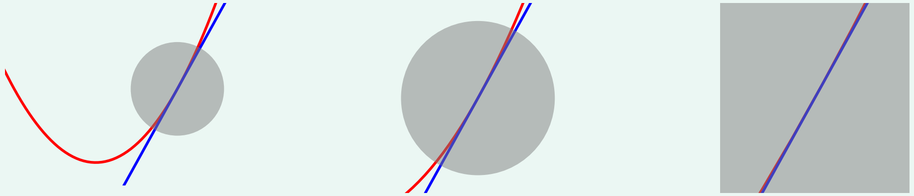
Soient f et g deux fonctions définies et dérivables sur I telles que pour tout $x \in I$, $g(x) \neq 0$.
La fonction $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et on a $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - g'f}{g^2}$.

Théorème | Lien dérivée/variations

- $f' \geqslant 0$ sur $I \Leftrightarrow f$ est croissante sur I.
- $f' = 0$ sur $I \Leftrightarrow f$ est constante sur I.
- $f' \leqslant 0$ sur $I \Leftrightarrow f$ est décroissante sur I.

Définition

Si la courbe $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f est bien "lisse" au voisinage d'un point $A(a; f(a))$, on appelle **tangente** à $\mathscr{C}_f$ en A la droite qui épouse localement la direction de cette courbe.
Autrement dit, en se rapprochant du point A, la courbe va finir par se confondre avec sa tangente en ce point.



Propriété | Équation de la tangente

$f'(a)$ est le **coefficient directeur** de $T_a(f)$, la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a.
Cette tangente admet pour **équation** :

$$y = f'(a) \times (x - a) + f(a).$$

Exemple Soit $f(x) = 4x^2 - 10x + 2$.
Déterminons l'équation réduite de la tangente $T_2(f)$.
Tout d'abord, $f'(x) = 4 \times 2x - 10 \times 1 + 0 = 8x - 10$ donc $f'(2) = 8 \times 2 - 10 = 6$.
Enfin, $f(2) = 4 \times 2^2 - 10 \times 2 = 2 = -2$.

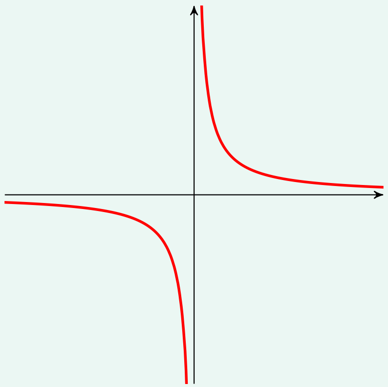
L'équation attendue est

$$\begin{aligned} y &= f'(2)(x-2) + f(2) \\ y &= 6(x-2) - 2 \\ y &= 6x - 14. \end{aligned}$$

2 Fonction inverse

Définition

La **fonction inverse** est la fonction f définie sur $\mathbf{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
Sa courbe représentative s'appelle une **hyperbole**.



Propriété | Dérivée de la fonction inverse

Pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

Exercice

Donner la dérivée des expressions suivantes.

1. $f(x) = 3x - \dfrac{1}{x}$
2. $g(x) = x^3 - 2x^2 + 12x + \dfrac{1}{x}$
3. $h(x) = \dfrac{12}{x}$
4. $k(x) = (5x + 2x^3) \times \dfrac{1}{x^2}$

Cela nous permet donc d'énoncer le résultat suivant.

Propriétés | Variations de la fonction inverse

- La fonction inverse est **décroissante** sur $]-\infty; 0[$:

  Pour tout $x \leqslant y < 0$, on a $\dfrac{1}{x} \geqslant \dfrac{1}{y}$.

- La fonction inverse est **décroissante** sur $]0; +\infty[$:

  Pour tout $0 < x \leqslant y$, on a $\dfrac{1}{x} \geqslant \dfrac{1}{y}$.

Le tableau de variations de la fonction inverse est le suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$	$\searrow$	$\|$	$\searrow$

Attention

Si $x < 0 < y$, alors $\dfrac{1}{y} \geqslant \dfrac{1}{x}$.

Exercice

Construire le tableau de variations des fonctions suivantes. Donner aussi l'équation de la tangente au point d'abscisse 1.

- $f : x \mapsto -\dfrac{1}{x}$
- $g : x \mapsto \dfrac{12}{x} - 4$

Théorème | Asymptotes et limites

- La droite horizontale d'équation $y = 0$ est une *asymptote horizontale* à $\mathscr{C}_f$.

  On a : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.

- La droite verticale d'équation $x = 0$ est une *asymptote verticale* à $\mathscr{C}_f$.

  On a : $\displaystyle\lim_{x\to0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.