Rentrée 2023

Exercice 1

Une suite étant donnée, calculer le terme demandé.

1. Soit (u_n) une suite définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 3n+2$. Calculer u_{14}.
2. Soit (u_n) une suite définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = -3n^2 - 2n - 5$. Calculer u_5.
3. Soit (u_n) une suite définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{-n+2}{4n+2}$. Calculer u_6.
4. Soit (u_n) une suite définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 + 5n - 6$. Calculer u_4.

Exercice 2

Une suite étant donnée, calculer le terme demandé.

1. Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = -2u_n - 5$. Calculer u_3.
2. Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = -7$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = u_n + 7$. Calculer u_6.
3. Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = 5 - u_n^2$. Calculer u_3.
4. Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 7$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = u_n \times (-4)$. Calculer u_3.

Exercice 3

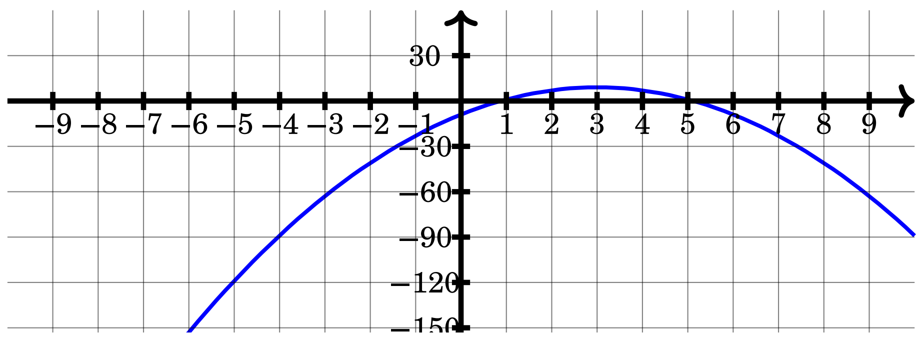
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes.

1. $(-5-4x)(4x-1) > 0$
2. $x^2 + 4x + 7 \geq 0$
3. $-2x^2 + 20x \leq 49$
4. $5x^2 = 5x$

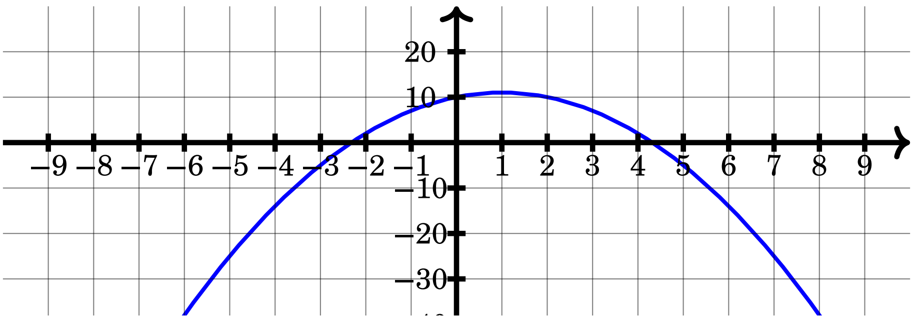
Exercice 4

Trouver l'expression de chacune des fonctions suivantes.

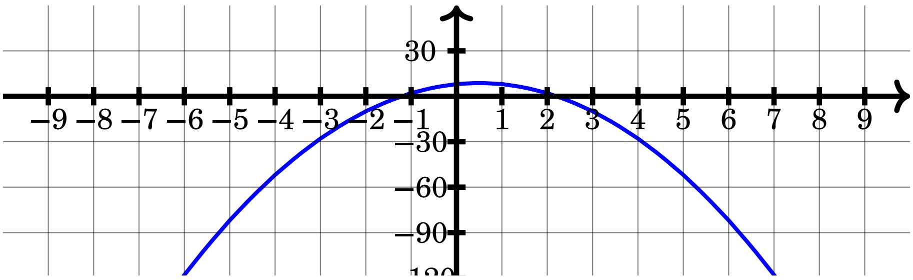
1. Quelle est l'expression de la fonction polynomiale f du second degré dont la parabole a pour sommet le point de coordonnées $(3;9)$ et passe par le point de coordonnées $(-4;-89)$?



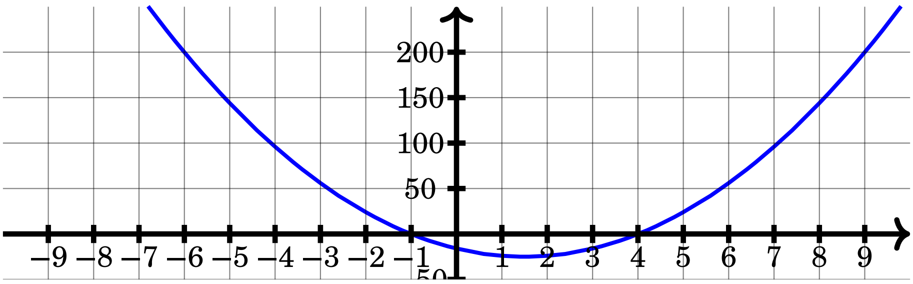
2. Quelle est l'expression de la fonction polynomiale g du second degré dont la parabole a pour sommet le point de coordonnées $(1;11)$ et passe par le point de coordonnées $(-1;7)$?



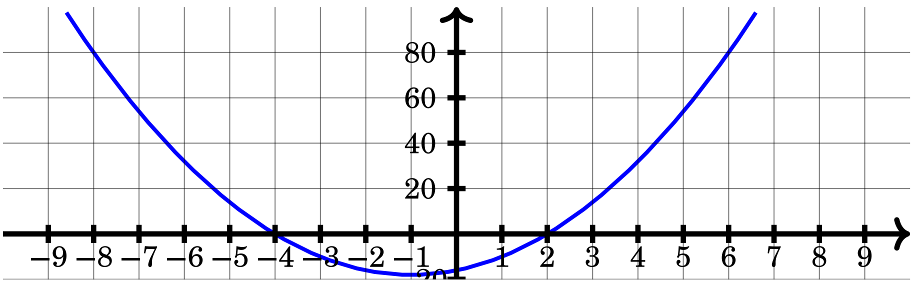
3. Quelle est l'expression de la fonction polynomiale h du second degré qui passe par les points de coordonnées $(-1;2)$, $(0;8)$ et $(1;8)$?



4. Quelle est l'expression de la fonction polynomiale i du second degré qui s'annule en $x=-1$ et en $x=4$ et dont la parabole passe par le point de coordonnées $(3;-16)$?



5. Quelle est l'expression de la fonction polynomiale j du second degré qui s'annule en $x=-4$ et en $x=2$ et dont la parabole passe par le point de coordonnées $(3;14)$?



Exercice 5

Déterminer, suivant la valeur du paramètre m, le **nombre de solutions** de l'équation du second degré.

1. $2\ m\ x - x^2 - 2\ m - x - 1 = 0$
2. $2\ m\ x + x^2 + m - 3\ x - 2 = 0$

Exercice 6

1. Dans le plan rapporté à un repère, on considère la parabole (P) d'équation $y = -2x^2 - 4x + 30$.

   a. Déterminer la forme canonique de $f(x) = -2x^2 - 4x + 30$.

   b. En déduire les coordonnées du sommet de la parabole et les variations de la fonction f associée au polynôme (P).

2. La parabole d'équation $y = 10x^2 - 18x - 4$ coupe-t-elle l'axe des abscisses ? Si oui, déterminer les coordonnées de ce(s) point(s).

Exercice 7

Pour chacune des fonctions suivantes, dire sur quel ensemble elle est dérivable, puis déterminer l'expression de sa fonction dérivée.

1. $f : x \longmapsto x^9 + \dfrac{1}{x}$
2. $g : x \longmapsto -3$
3. $h : x \longmapsto x^4$
4. $i : x \longmapsto -5\ x^2 + x + 3$
5. $j : x \longmapsto 2\ x + 3$
6. $k : x \longmapsto \sqrt{x}$

Exercice 1

1. Dans l'expression de u_n on remplace n par 14, on obtient : $u_{14} = 3 \times 14 + 2 = 44$.
2. Dans l'expression de u_n on remplace n par 5, on obtient : $u_5 = -3 \times 5^2 - 2 \times 5 - 5 = -90$.
3. Dans l'expression de u_n on remplace n par 6, on obtient : $u_6 = \dfrac{-1 \times 6 + 2}{4 \times 6 + 2} = \dfrac{-4}{26} = -\dfrac{2}{13}$.
4. Dans l'expression de u_n on remplace n par 4, on obtient : $u_4 = 4^2 + 5 \times 4 - 6 = 30$.

Exercice 2

1. On calcule successivent les termes jusqu'à obtenir u_3 :
   $u_1 = -2 \times u_0 - 5 = -2 \times 3 - 5 = -11$
   $u_2 = -2 \times u_1 - 5 = -2 \times (-11) - 5 = 17$
   $u_3 = -2 \times u_2 - 5 = -2 \times 17 - 5 = -39$
2. On calcule successivent les termes jusqu'à obtenir u_6 :
   $u_1 = u_0 + 7 = -7 + 7 = 0$
   $u_2 = u_1 + 7 = 0 + 7 = 7$
   $u_3 = u_2 + 7 = 7 + 7 = 14$
   $u_4 = u_3 + 7 = 14 + 7 = 21$
   $u_5 = u_4 + 7 = 21 + 7 = 28$
   $u_6 = u_5 + 7 = 28 + 7 = 35$
3. On calcule successivent les termes jusqu'à obtenir u_3 :
   $u_1 = 5 - (u_0)^2 = 5 - 3^2 = -4$
   $u_2 = 5 - (u_1)^2 = 5 - (-4)^2 = -11$
   $u_3 = 5 - (u_2)^2 = 5 - (-11)^2 = -116$
4. On calcule successivent les termes jusqu'à obtenir u_3 :
   $u_1 = u_0 \times (-4) = 7 \times (-4) = -28$
   $u_2 = u_1 \times (-4) = -28 \times (-4) = 112$
   $u_3 = u_2 \times (-4) = 112 \times (-4) = -448$

Exercice 3

1. On cherche l'ensemble des x tels que : $(-5 - 4x)(4x - 1) > 0$.

   $-5 - 4x = 0 \iff x = \dfrac{-5}{4}$ et $4x - 1 = 0 \iff x = \dfrac{1}{4}$

   On en déduit le signe du polynôme dans un tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{-5}{4}$		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$-5 - 4x$		$+$	0	$-$		$-$	
$4x - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$(-5 - 4x)(4x - 1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   Finalement $S = \left]\dfrac{-5}{4}; \dfrac{1}{4}\right[$.

2. On cherche l'ensemble des x tels que : $x^2 + 4x + 7 \geq 0$.

   Calculons le discriminant de ce polynôme du second degré : $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 7 = -12$.

Le discriminant est strictement négatif, donc le polynôme est toujours du signe de a donc ici toujours positif.

Finalement $S = \mathbb{R}$.

3. $-2x^2 + 20x \leq -49 \iff -2x^2 + 20x - 49 \leq 0$
</br>Calculons le discriminant de ce polynôme du second degré : $\Delta = 20^2 - 4 \times (-2) \times (-49) = 8$.

Le discriminant est strictement positif, donc le polynôme a deux racines.

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-20 - \sqrt{8}}{2 \times (-2)} \approx 5,707$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-20 + \sqrt{8}}{2 \times (-2)} \approx 4,293$$

On sait que le polynôme est du signe de a à l'extérieur de ses racines donc $S = \left]-\infty; \frac{-20 + \sqrt{8}}{-4}\right] \cup \left[\frac{-20 - \sqrt{8}}{-4}; +\infty\right[$.

4. On cherche l'ensemble des x tels que : $5x^2 = 5x$.

$$\begin{aligned} 5x^2 = 5x &\iff 5x^2 - 5x = 0 \\ &\iff x(5x - 5) = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad 5x - 5 = 0 \end{aligned}$$

Finalement $S = \{0\,;\,1\}$.

Exercice 4

1. D'après les coordonnées $(3;9)$ du sommet, f a pour forme canonique : $f(x) = a(x-3)^2 + 9$.
De plus $f(-4) = -89$ donc $a(-4-3)^2 + 9 = -89$ soit $16a + 24a + 9a + 9 = -89$.
On en déduit que $a = \frac{-89 - 9}{49} = -2$.
Développons la forme canonique : $f(x) = a(x-3)^2 + 9 = a(x^2 - 6x + 9) + 9 = ax^2 - 6ax + 9a + 9$.
En remplaçant a par sa valeur -2 dans l'expression canonique développée $ax^2 - 6ax + 9a + 9$ on obtient :
$f(x) = -2x^2 + 12x - 9$

2. D'après les coordonnées $(1;11)$ du sommet, g a pour forme canonique : $g(x) = a(x-1)^2 + 11$.
De plus $g(-1) = 7$ donc $a(-1-1)^2 + 11 = 7$ soit $1a + 2a + 1a + 11 = 7$.
On en déduit que $a = \frac{7 - 11}{4} = -1$.
Développons la forme canonique : $g(x) = a(x-1)^2 + 11 = a(x^2 - 2x + 1) + 11 = ax^2 - 2ax + a + 11$.
En remplaçant a par sa valeur -1 dans l'expression canonique développée $ax^2 - 2ax + a + 11$ on obtient :
$g(x) = -x^2 + 2x + 10$

3. Soit $h(x) = ax^2 + bx + c$, l'expression de la fonction cherchée, comme $h(0) = 8$ nous en déduisons que $c = 8$.
Donc $h(x) = ax^2 + bx + 8$.
En substituant dans cette expression les valeurs de l'énoncé, nous obtenons :
$\begin{cases} 8 = a \times 1^2 + b \times 1 + 8 = a + b + 8 \\ 2 = a \times (-1)^2 + b \times (-1) + 8 = a - b + 8 \end{cases}$
Ce qui équivaut à
$\begin{cases} 8 - 8 = 0 = a + b \\ 2 - 8 = -6 = a - b \end{cases}$
En ajoutant et en soustrayant les équations membre à membre, on obtient :

$\begin{cases} -6 = 2a \\ 6 = 2b \end{cases}$
La résolution de ce système donne $a = -3$ et $b = 3$.
D'où $h(x) = -3x^2 + 3x + 8$

4. Comme -1 et 4 sont les deux solutions de l'équation $i(x) = 0$, on peut factoriser $i(x)$: $i(x) = a(x+1)(x-4)$.
   Comme $i(3) = -16$, on en déduit que $-16 = a(3+1)(3-4)$ d'où $a = -16 \div (-4) = 4$.
   On obtient ainsi $i(x) = 4(x+1)(x-4)$ ou en développant $i(x) = 4x^2 - 12x - 16$
5. Comme -4 et 2 sont les deux solutions de l'équation $j(x) = 0$, on peut factoriser $j(x)$: $j(x) = a(x+4)(x-2)$.
   Comme $j(3) = 14$, on en déduit que $14 = a(3+4)(3-2)$ d'où $a = 14 \div 7 = 2$.
   On obtient ainsi $j(x) = 2(x+4)(x-2)$ ou en développant $j(x) = 2x^2 + 4x - 16$

Exercice 5

1. Écrivons l'équation sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$:
   $-x^2 + (2\ m - 1)\ x - 2\ m - 1 = 0$
   On a donc $a = -1$, $b = 2\ m - 1$ et $c = -2\ m - 1$
   Le discriminant vaut $\Delta = b^2 - 4 \times a \times c = (2\ m - 1)^2 + 4(-2\ m - 1)$
   Ou encore, sous forme développée : $\Delta = 4\ m^2 - 12\ m - 3$
   Cherchons les valeurs de m qui annulent cette expression du second degré :
   Le discriminant Δ' vaut : $\Delta' = 192$ (Remarquons que $\sqrt{\Delta'} = 8\ \sqrt{3}$)
   Celui-ci étant strictement positif, l'équation $\Delta = 0$ a 2 solutions :
   $m_1 = \dfrac{(12 - 8\ \sqrt{3})}{8} \simeq -0.2321$ et $m_2 = \dfrac{(12 + 8\ \sqrt{3})}{8} \simeq 3.232$
   De plus le coefficient devant m^2 est positif, Δ est donc une parabole avec ses branches dirigées vers le haut.
   Δ est donc positif à l'extérieur des racines et négatif à l'intérieur.
   <u>Conclusion</u> :
   - Si $m = m_1$ ou m_2, l'équation admet une unique solution,
   - Si $m \in]m_1, m_2[$, l'équation n'a pas de solution réelle,
   - Si $m \in]-\infty, m_1[\cup]m_2, +\infty[$, l'équation admet 2 solutions réelles
2. Écrivons l'équation sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$:
   $x^2 + (2\ m - 3)\ x + m - 2 = 0$
   On a donc $a = 1$, $b = 2\ m - 3$ et $c = m - 2$
   Le discriminant vaut $\Delta = b^2 - 4 \times a \times c = (2\ m - 3)^2 - 4\ (m - 2)$
   Ou encore, sous forme développée : $\Delta = 4\ m^2 - 16\ m + 17$
   Cherchons les valeurs de m qui annulent cette expression du second degré :
   Le discriminant Δ' vaut : $\Delta' = -16$
   Celui-ci étant strictement négatif, l'équation n'a pas de solution et Δ ne change pas de signe.
   Comme le coefficient devant m^2 est positif, $\Delta > 0$.
   <u>Conclusion</u> : L'équation du départ admet toujours 2 solutions.

Exercice 6

1. **a.** On cherche la forme canonique de $-2x^2 - 4x + 30$ avec $a = -2$, $b = -4$ et $c = 30$.

   On sait que $f(x)(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.

   $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{4}{-4} = -1$

$\beta = f(\alpha) = f(-1) = -2 \times (-1)^2 - 4 \times (-1) + 30 = 32$

On a donc $f(x) = -2(x+1)^2 + 32$.

b. Le sommet de cette parabole a donc pour coordonnées $(-1\,;32)$.

$f(x) = -2(x+1)^2 + 32$ avec $a < 0$ d'où le tableau de variations :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$-2x^2 - 4x + 30$	↗	32	↘

2. S'il existe un point d'intersection $M(x\,;y)$ entre la parabole et l'axe des abscisses alors $y = 10x^2 - 18x - 4 = 0$.

On calcule le discriminant de ce trinôme : $\Delta = (-18)^2 - 4 \times 10 \times (-4)$.

$\Delta = 484$

Δ est strictement positif donc cette équation admet deux solutions.

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{18 - \sqrt{484}}{2 \times 10} = -\frac{1}{5}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{18 + \sqrt{484}}{2 \times 10} = 2$$

La parabole coupe donc l'axe des abscisses en deux points de coordonnées $\left(\frac{-1}{5}\,;0\right)$ et $(2\,;0)$.

Exercice 7

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $f' : x \longmapsto \dfrac{9x^{10} - 1}{x^2}$

2. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g' : x \longmapsto 0$

3. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h' : x \longmapsto 4x^3$

4. i est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $i' : x \longmapsto 1 - 10x$

5. j est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $j' : x \longmapsto 2$

6. k est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $k' : x \longmapsto \dfrac{\frac{1}{2}}{\sqrt{x}}$