

DEVOIR SURVEILLÉ 6

Calculatrice autorisée
Vendredi 29 mars 2024

EXERCICE 1 (10 POINTS)

1. Résoudre les deux équations différentielles suivantes.

a. $y' = 4x^4 - 3x + 2$

b. $y' = \frac{3x}{\sqrt{2x^2 + 1}}$

2. a. Résoudre l'équation différentielle (E) : $2y' - 3y = 8y + 4y' + 1$.

b. Soit f une solution de (E).

Donner son expression si, de plus, $f(0) = 4$.

3. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (F) : $2y' - 3y = 3x^2 - x - 2$ en cherchant une solution particulière φ sous la forme $\varphi(x) = ax^2 + bx + c$.

CORRECTION

1. a. y est primitive de f d'expression $f(x) = 4x^4 - 3x + 2$. C'est-à-dire :

$$y(x) = \frac{4}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + C \quad \text{où } C \in \mathbf{R}.$$

b.

$$y(x) = \frac{3}{2}\sqrt{2x^2 + 1} + C \quad \text{où } C \in \mathbf{R}$$

2. a. $2y' - 3y = 8y + 4y' + 1 \Leftrightarrow y' = -\frac{11}{2}y - \frac{1}{2}$ est sous la forme $y' = ay + b$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} y(x) &= Ce^{ax} - \frac{b}{a} \quad \text{où } C \in \mathbf{R} \\ &= Ce^{-\frac{11}{2}x} - \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{11}{2}} \\ &= Ce^{-\frac{11}{2}x} - \frac{1}{11}. \end{aligned}$$

b. f est d'expression $Ce^{-\frac{11}{2}x} - \frac{1}{11}$ pour un certain $C \in \mathbf{R}$.

Si $f(0) = 4$ alors $C - \frac{1}{11} = 4$ donc $C = \frac{45}{11}$.

$$f(x) = \frac{45}{11}e^{-\frac{11}{2}x} - \frac{1}{11}$$

3. Si φ vérifie (F) alors :

$$\begin{aligned} 2\varphi'(x) - 3\varphi(x) &= 3x^2 - x - 2 \\ \Leftrightarrow 2(2ax + b) - 3(ax^2 + bx + c) &= 3x^2 - x - 2 \\ \Leftrightarrow 4ax + 2b - 3ax^2 - 3bx - 3c &= 3x^2 - x - 2 \\ \Leftrightarrow 0 &= (3 + 3a)x^2 + (3b - 4a - a)x + 3c - 2b + 2 \end{aligned}$$

En résolvant le système en a, b, c par identification au polynôme nul, on obtient $a = -1, b = -1$ et $c = 0$. C'est-à-dire, $\varphi(x) = -x^2 - x$.

Enfin, $2y' - 3y = 3x^2 - x - 2 \Leftrightarrow y' = \frac{3}{2}y + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1$ est sous la forme $y' = ay + f$.

$$\begin{aligned} y(x) &= Ce^{ax} + \varphi(x) \quad \text{où } C \in \mathbf{R} \\ &= Ce^{\frac{3}{2}x} - x^2 - x \end{aligned}$$

EXERCICE 2 (10 POINTS)

Dans un petit service départemental d'incendie et de secours (SDIS) du Grand Est, la variable aléatoire X donnant le nombre d'interventions quotidiennes suit la loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 0,2$.

1. Déterminer la probabilité qu'il se passe une journée sans aucune intervention.
2. Déterminer la probabilité qu'il y ait deux interventions dans la journée.
3. Déterminer le nombre moyen d'interventions quotidiennes.
4. Sachant qu'une intervention a déjà eu lieu ce matin, quelle est la probabilité qu'il y ait au moins quatre interventions aujourd'hui?
5. Déterminer la probabilité qu'il y ait, en tout, deux interventions sur deux journées consécutives.

Bonus Déterminer la probabilité qu'il n'y ait qu'une seule intervention en une semaine. En un mois? Jusqu'à la fin des temps?

CORRECTION

Notons que $X \sim \mathcal{B}(6; 0,2)$.

1. $\mathbb{P}(X = 0) = \binom{6}{0} \times 0,2^0 \times (1 - 0,2)^6 = 0,8^6 \approx 0,262$
2. $\mathbb{P}(X = 2) = \binom{6}{2} \times 0,2^2 \times (1 - 0,2)^4 \approx 0,246$
3. $\mathbb{E}[X] = 6 \times 0,2 = 1,2$ donc on peut espérer 1,2 interventions par jour.
4. Sachant qu'une intervention a déjà eu lieu ce matin ($X \geq 1$), la probabilité qu'il y ait au moins 4 interventions ($X \geq 4$) aujourd'hui est égale à :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{X \geq 1}(X \geq 4) &= \frac{\mathbb{P}(X \geq 1 \cap X \geq 4)}{\mathbb{P}(X \geq 1)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X \geq 4)}{\mathbb{P}(X \geq 1)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X = 4) + \mathbb{P}(X = 5) + \mathbb{P}(X = 6)}{1 - \mathbb{P}(X = 0)} \\ &\approx 0,023\end{aligned}$$

5. Posons X_2 la variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(12; 0,2)$ qui correspond trivialement au nombre d'interventions sur deux journées.

On doit calculer $\mathbb{P}(X_2 = 2) = \binom{12}{2} \times 0,2^2 \times (1 - 0,2)^{10} \approx 0,283$.

Bonus Posons X_n la variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(6n; 0,2)$ qui correspond au nombre d'interventions sur n journées.

- Pour une semaine, $\mathbb{P}(X_7 = 1) = \binom{42}{1} \times 0,2^1 \times (1 - 0,2)^{41} \approx 9 \times 10^{-4}$.
- Pour un mois de 31 jours, $\mathbb{P}(X_{31} = 1) = \binom{186}{1} \times 0,2^1 \times (1 - 0,2)^{185} \approx 5 \times 10^{-20}$.
- Jusqu'à la fin des temps, on aura une probabilité limite de $\mathbb{P}(X_n = 1) = 0,2(6n - 1)0,8^{6n-1}$ qui tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$.