DEVOIR SURVEILLÉ 5

Calculatrice autorisée

Vendredi 9 février 2024

EXERCICE 1 (10 POINTS)

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$u(x) = \ln(x) + x - 3.$$

1. Justifier que la fonction u est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

2. Démontrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α comprise entre 2 et 3.

3. En déduire le signe de $u(x)$ en fonction de x.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)[\ln(x) - 2] + 2.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0.

2. **a.** Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{u(x)}{x^2}$ où u est la fonction définie dans la partie A.

b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Partie C

1. **a.** Résoudre $11 - \mathrm{e}^{2x+1} = 4$ dans $\mathbf{R}$.

b. Résoudre $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n < 10^{-6}$ dans $\mathbf{R}$ puis dans $\mathbf{N}$.

2. Soit $\mathscr{C}'$ la courbe d'équation $y = \ln(x)$.

a. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $f(x) - \ln(x) = \dfrac{2 - \ln(x)}{x}$.

b. En déduire que les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ ont un seul point commun dont on déterminera les coordonnées.

CORRECTION

Partie A

1. La fonction est la somme des fonctions $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto x - 3$, toutes deux strictement croissantes sur $]0\,;\,+\infty[$, elle est donc strictement croissante sur cet intervalle.
2. Remarquons que la fonction ln conserve les inégalités strictes puisqu'elle est strictement croissante.
   Calculons $u(2) = \ln(2) - 1$ or $\ln(2) < \ln(\mathrm{e}) = 1$ car $\mathrm{e} > 2$. On prouve ainsi que $u(2) < 0$.
   D'autre part, $u(3) = \ln(3)$ or $\ln(3) > \ln(1) = 0$ car $3 > 1$, ce qui montre que $u(3) > 0$.
   Notons également que u est continue comme somme de fonctions continues.
   Nous sommes donc dans les conditions d'application du théorème des valeurs intermédiaires.
   0 possède ainsi un antécédent par u dans l'intervalle $[2\,;\,3]$. Comme u est strictement monotone sur $]0\,;\,+\infty[$, cet antécédent α est unique sur $]0\,;\,+\infty[$.
3. Compte-tenu du sens de variation de u, on a :

x	0		α		$+\infty$
$u(x)$	‖	-	0	+	

Partie B

1. Nous savons que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty$. Par opérations sur les limites, on en déduit que :
   $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$
2. **a.** f est dérivable sur $]0;\,+\infty[$ comme sommes et produits de fonctions dérivables sur $]0;\,+\infty[$.
   Pour tout $x > 0$:
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x^2}(\ln(x) - 2) + \left(1 - \frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}. \text{ En réduisant au dénominateur } x^2 : \\ &= \frac{1}{x^2}(\ln(x) - 2 + x - 1) \\ &= \frac{1}{x^2}(\ln(x) + x - 3) \\ &= \frac{1}{x^2}u(x) \end{aligned}$$
   b. Pour tout $x > 0$, $x^2 > 0$. Ainsi le signe de f' est celui de u. On en déduit que f est strictement décroissante sur $]0\,;\,\alpha]$ et strictement croissante sur $]\alpha\,;\,+\infty]$.

Partie C

1. **a.** $11 - \mathrm{e}^{2x+1} = 4 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x+1} = 7 \Leftrightarrow 2x + 1 = \ln(7) \Leftrightarrow x = \frac{\ln(7)-1}{2}$
   b.
$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{3}\right)^n < 10^{-6} &\Leftrightarrow n\ln\left(\frac{1}{3}\right) < -6\ln(10) \\ &\Leftrightarrow n > \frac{-6\ln(10)}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)} \text{ car } \ln\left(\frac{1}{3}\right) < 0 \\ &\Leftrightarrow n > \frac{6\ln(10)}{\ln(3)} \end{aligned}$$
   Les solutions dans $\mathbf{R}$ sont $\left]\dfrac{6\ln(10)}{\ln(3)}\,;+\infty\right[$.
   $\dfrac{6\ln(10)}{\ln(3)} \approx 12{,}6$ donc les solutions dans $\mathbf{N}$ sont l'ensemble des nombres entiers naturels supérieurs ou égaux à 13.

2. a. On calcule :

$$\begin{aligned} f(x)-\ln(x) &= \left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln(x)-2)+2-\ln(x). \text{ On réduit au dénominateur } x : \\ &= \frac{1}{x}\left[(x-1)(\ln(x)-2)+2x-x\ln(x)\right] \\ &= \frac{1}{x}\left[x\ln(x)-2x-\ln(x)+2+2x-x\ln(x)\right] \\ &= \frac{1}{x}(2-\ln(x)) \end{aligned}$$

b. Un point $M(x;y)$ appartient aux deux courbes à la fois lorsque :

$$\left\{\begin{array}{lcl} y &=& f(x) \\ y &=& \ln(x) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} y &=& \ln(x) \\ f(x) &=& \ln(x) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} y &=& \ln(x) \\ 0 &=& f(x)-\ln(x) \end{array}\right.$$

Or $2-\ln(x)=0$ n'a qu'une solution qui est $x=\mathrm{e}^2$.
Les deux courbes se coupent donc en un unique point d'abscisse $x=\mathrm{e}^2$ et d'ordonnée $y=\ln\left(\mathrm{e}^2\right)=2$.

EXERCICE 2 (10 POINTS)

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.
On considère les points A(0 ; 4 ; 1), B (1 ; 3 ; 0), C(2 ; −1 ; −2) et D (7 ; −1 ; 4).

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$.

   a. Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).
   b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
   c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.
   d. Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite Δ et du plan (ABC).

3. Soit $\mathscr{P}_1$ le plan d'équation $x+y+z=0$ et $\mathscr{P}_2$ le plan d'équation $x+4y+2=0$.

   a. Démontrer que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants.
   b. Vérifier que la droite d, intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$, admet la représentation paramétrique suivante :
   $$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& -4t-2 \\ y &=& t \\ z &=& 3t+2 \end{array}\right., \ t\in\mathbf{R}.$$
   c. La droite d et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles ?

CORRECTION

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.
On considère les points A(0 ; 4 ; 1), B(1 ; 3 ; 0), C(2 ; −1 ; −2) et D (7 ; −1 ; 4).

1. Démontrons que les points A, B et C ne sont pas alignés.

   On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-5\\-3\end{pmatrix}$. On a : $\frac{1}{2}\neq\frac{-1}{-5}$.

   Les coordonnéees des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas proportionnelles.
   Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires : les points ne sont pas alignés.

2. Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$.

a. Démontrons que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).
On a $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u} = 1\times 2+(-1)\times(-1)+(-1)\times 3 = 0$ et $\overrightarrow{AC}\cdot\vec{u} = 2\times 2+(-5)\times(-1)+(-3)\times 3 = 0$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux à $\vec{u}$.
La droite Δ est orthogonale à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) : elle est orthogonale au plan (ABC).

b. De ce qui précède, on déduit que $\vec{u}$ est un vecteur normal à (ABC).
Une équation cartésienne de (ABC) est de la forme $2x-y+3z+d=0$.
Comme le point A appartient au plan (ABC), ses coordonnées vérifient :
$2\times 0+(4)\times(-1)+(1)\times 3+d=0 \iff d=1$.
On en déduit une équation cartésienne du plan (ABC) : $2x-y+3z+1=0$.

c. Déterminons une représentation paramétrique de la droite Δ.

Comme la droite Δ a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ et contient le point D $(7\,;\,-1\,;\,4)$, une représentation paramétrique de Δ est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2t+7\\ y &=& -t-1\\ z &=& 3t+4\end{array}\right., t\in\mathbf{R}.$$

d. Déterminons les coordonnées du point H, intersection de la droite Δ et du plan (ABC).
Les coordonnées de H sont les solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2t+7\\ y &=& -t-1\\ z &=& 3t+4\\ 2x-y+3z+1 &=& 0\end{array}\right., t\in\mathbf{R}.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2t+7\\ y &=& -t-1\\ z &=& 3t+4\\ 2x-y+3z+1 &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2t+7\\ y &=& -t-1\\ z &=& 3t+4\\ 2(2t+7)-(-t-1)+3(3t+4)z+1 &=& 0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2t+7\\ y &=& -t-1\\ z &=& 3t+4\\ t &=& -2\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 3\\ y &=& 1\\ z &=& -2\\ t &=& -2\end{array}\right.$$

Le point H a pour coordonnées $H(3;\ 1;\ -2)$

3. Soit $\mathscr{P}_1$ le plan d'équation $x+y+z=0$ et $\mathscr{P}_2$ le plan d'équation $x+4y+2=0$.

a. Démontrons que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants.

Le plan $\mathscr{P}_1$ d'équation $x+y+z=0$ a pour vecteur normal $\vec{n_1}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Le plan $\mathscr{P}_\epsilon$ d'équation $x+4y+2=0$ a pour vecteur normal $\vec{n_2}\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}$.

Les coordonnées des vecteurs $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ ne sont pas proportionnelles. Les vecteurs $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ ne sont pas colinéaires.
Les plans ne sont pas parallèles; ils sont sécants.

b. Vérifions que la droite d, intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$, a pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& -4t-2\\ y &=& t\\ z &=& 3t+2\end{array}\right., t\in\mathbf{R}.$$

Considérons le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 0\\ x+4y+2 &=& 0\\ y &=& y\end{array}\right., t\in\mathbf{R}.$$

$$\begin{cases} x+y+z = 0 \\ x+4y+2 = 0 \\ y = t \end{cases} \iff \begin{cases} z = -x-t \\ x = -4t-2 \\ y = t \end{cases} \iff \begin{cases} z = 3t+2 \\ x = -4t-2 \\ y = t \end{cases}$$

On en déduit que la droite d, intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$, a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -4t-2 \\ y = t \\ z = 3t+2 \end{cases}, \ t \in \mathbf{R}.$$

On peut également vérifier que la droite (d) est incluse dans le plan $\mathscr{P}_1$ et également dans le plan $\mathscr{P}_2$.
En effet, on a démontré que ces deux plans étaient sécants, ils sont donc sécants suivant une droite qui appartient simultanément aux deux plans et cette droite est unique.
$-4t-2+t+3t+2=0$ donc (d) est contenue dans le plan $\mathscr{P}_1$;
$-4t-2+4t+2=0$ donc (d) est contenue dans la plan $\mathscr{P}_2$

c. On déduit de la représentation paramétrique précédente que la droite d a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix}-4\\1\\3\end{pmatrix}$.

Le plan (ABC) a pour vecteur normal $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$.

$\vec{u}\cdot\overrightarrow{u'}=0$ donc $\vec{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont orthogonaux : la droite d et le plan (ABC) sont parallèles.