# Devoir surveillé 3

*Calculatrice autorisée*

Vendredi 20 octobre 2023

---

**Exercice 1 (6 points)**

1. **a.** Soit $n \in \mathbf{N}$. Simplifier $2^{n+1} - 2^n$.

   **b.** Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ :

$$2^n - 2^{n-1} - \cdots - 2 = 0.$$

2. Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + n - 2$. On admet que $u_5 = \dfrac{553}{243}$.

   **a.** Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 5$, $u_n \geqslant n - 3$.

   **b.** En déduire la limite de $(u_n)$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

**Correction**

1. **a.** Soit $n \in \mathbf{N}$.

$$\begin{aligned} 2^{n+1} - 2^n &= 2 \times 2^n - 2^n \\ &= 2^n(2-1) \\ &= \boxed{2^n} \end{aligned}$$

   **b.** Montrons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^*$, la propriété $P(n)$ : "$2^n - 2^{n-1} - \cdots - 2 = 0$".

   **Initialisation :** Montrons que $P(1)$ est vraie. Si $n = 1$, $2^n - 2^{n-1} - \cdots - 2 = 2^1 - 2 = 0$.

   **Hérédité :** Supposons $P(n)$ vraie pour un rang $n$ fixé et montrons $P(n+1)$.

$$\begin{aligned} 2^{n+1} - 2^n - 2^{n-1} - \cdots - 2 &= 2^n - 2^{n-1} - \cdots - 2 && \text{par la question 1.a.} \\ &= 0 && \text{par hypothèse de récurrence} \end{aligned}$$

   $P(n+1)$ est vraie !

   Nous avons bien démontré par récurrence que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N}^* : 2^n - 2^{n-1} - \cdots - 2 = 0.}$

2. **a.** Montrons par récurrence sur $n \geqslant 5$, la propriété $P(n)$ : "$u_n \geqslant n - 3$".

   **Initialisation :** $P(5)$ est vraie. En effet, on sait d'après l'énoncé que $u_5 = \dfrac{553}{243}$ donc $u_5 \geqslant \dfrac{486}{243} = 2 = 5 - 3$.

   **Hérédité :** Supposons $P(n)$ vraie pour un rang $n$ fixé et montrons $P(n+1)$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{1}{3}u_n + n - 2 && \text{par relation de récurrence} \\ &\geqslant \frac{1}{3} \times (n-3) + n - 2 && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &\geqslant \frac{n}{3} + n - 3 \\ &\geqslant \frac{5}{3} + n - 3 && \text{car } n \geqslant 5 \\ &\geqslant 1 + n - 3 \\ &\geqslant (n+1) - 3 \end{aligned}$$

   $P(n+1)$ est vraie !

   Nous avons bien démontré par récurrence que $\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 5 : u_n \geqslant n - 3.}$

**b.** $\lim\limits_{n\to+\infty} n-3=+\infty$ donc par le théorème de comparaison et la question précédente, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty.}$

## Exercice 2 (14 points)

Soit $(u_n)$ définie pour tout $n\in\mathbf{N}^*$ par :

$$u_n=\frac{n^2}{2^n}.$$

**1.** Pour tout entier $n\in\mathbf{N}^*$, on pose $v_n=\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

**a.** Montrer que, pour tout $n\in\mathbf{N}^*$ :

$$v_n=\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2.$$

**b.** Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\dfrac{1}{2}$.

**c.** Montrer que, pour tout entier $n\in\mathbf{N}^*$, $v_n>\dfrac{1}{2}$.

**d.** Déterminer le plus petit entier $n_0$ tel que, pour tout $n\geqslant n_0$, $v_n\leqslant\dfrac{3}{4}$.

**e.** En déduire que, pour tout $n\geqslant n_0$, $u_{n+1}\leqslant\dfrac{3}{4}u_n$.

**2.** Pour tout entier $n\geqslant 5$, on pose :

$$S_n=\sum_{k=5}^{n}u_k=u_5+u_6+\cdots+u_n.$$

**a.** Montrer par récurrence que, pour tout $n\geqslant 5$ :

$$u_n\leqslant\left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}u_5.$$

**b.** Montrer que, pour tout entier $n\geqslant 5$ :

$$S_n\leqslant\left[1+\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\cdots+\left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}\right]u_5.$$

**c.** En déduire que, pour tout entier $n\geqslant 5$, $S_n\leqslant 4u_5$.

**3.** Montrer que $(S_n)$ est croissante et en déduire qu'elle converge.

## Correction

**1. a.** Soit $n\in\mathbf{N}^*$.

$$v_n=\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}}=\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}\times\frac{2^n}{n^2}=\frac{(n+1)^2}{2n^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2$$

**b.** Soit $n\in\mathbf{N}^*$. $v_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^2=\dfrac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{n}=0$ alors $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\dfrac{1}{2}\times 1^2=\dfrac{1}{2}.}$

**c.** Soit $n\in\mathbf{N}^*$.

$$\begin{aligned}
&n+1\geqslant n\\
\Leftrightarrow\ &\frac{n+1}{n}\geqslant 1 &&\text{car } n>0\\
\Leftrightarrow\ &\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\geqslant 1^2\\
\Leftrightarrow\ &\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\geqslant\frac{1}{2}\\
\Leftrightarrow\ &v_n\geqslant\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

**d.** Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

$$\begin{aligned}
&v_n \leqslant \frac{3}{4} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \leqslant \frac{3}{4} \\
\Leftrightarrow\ & \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \leqslant \frac{3}{2} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{n+1}{n} \leqslant \sqrt{\frac{3}{2}} && \text{car } \frac{n+1}{n} > 0 \\
\Leftrightarrow\ & n+1 \leqslant \sqrt{\frac{3}{2}}\,n \\
\Leftrightarrow\ & n\left(1-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) \leqslant -1 \\
\Leftrightarrow\ & n \geqslant \frac{-1}{1-\sqrt{\frac{3}{2}}} && \text{car } 1-\sqrt{\frac{3}{2}} < 0
\end{aligned}$$

Enfin, $\dfrac{-1}{1-\sqrt{\frac{3}{2}}} \approx 4{,}5$ donc $\boxed{n_0 = 5 \text{ est le plus petit entier tel que, pour tout } n \geqslant n_0,\ v_n \leqslant \frac{3}{4}.}$

**e.** Soit $n \geqslant n_0$. Par définition de $v_n$, $\boxed{u_{n+1} = v_n u_n \leqslant \frac{3}{4} u_n}$ en utilisant la question précédente.

**2.** **a.** Montrons, par récurrence sur $n \geqslant 5$, la propriété $P(n)$ : "$u_n \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_5$"

**Initialisation :** $P(5)$ est vraie. En effet, $u_5 = 1 \times u_5 = \left(\frac{3}{4}\right)^{5-5} u_5$.

**Hérédité :** Supposons $P(n)$ pour $n$ fixé et montrons $P(n+1)$.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &\leqslant \frac{3}{4} u_n && \text{par 1.e.} \\
&\leqslant \frac{3}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_5 && \text{par hypothèse de récurrence} \\
&\leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{(n+1)-5} u_5
\end{aligned}$$

Nous avons prouvé que $P(n+1)$ est vraie.

Finalement, par récurrence, nous avons montré que, $\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 5 : u_n \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_5.}$

**b.** Soit $n \geqslant 5$.

$$\begin{aligned}
S_n = u_5 + u_6 + \cdots + u_n &\leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{5-5} u_5 + \left(\frac{3}{4}\right)^{6-5} u_5 + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_5 && \text{par 2.a.} \\
&\leqslant 1 \times u_5 + \frac{3}{4} \times u_5 + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_5 \\
&\leqslant \left[1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}\right] u_5 && \text{en factorisant par } u_5
\end{aligned}$$

**c.** $1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}$ est la somme des $n-6$ premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{3}{4}$.

$$
\begin{aligned}
1+\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\cdots+\left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} &= 1\times\frac{1-q^{n-4}}{1-q}\\
&= \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-4}}{1-\frac{3}{4}}\\
&\leqslant \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = 4
\end{aligned}
$$

Donc $\forall n \geqslant 5, S_n \leqslant 4u_5$.

**3.** $(S_n)$ est majorée par $4u_5$ à partir de $n=5$, elle convergera si elle est croissante également à partir de $n=5$ et c'est le cas puisque pour $n \geqslant 5$, $S_{n+1}-S_n = u_{n+1} = \dfrac{(n+1)^2}{2^{n+1}} > 0$ comme quotient de quantités strictement positives.