Devoir surveillé 2

Calculatrice autorisée

Vendredi 13 octobre 2023

Exercice 1

Calculer les dérivées des fonctions suivantes, définies sur I. On donnera l'ensemble de dérivabilité $\mathscr{D}_{f'}$.

1. $f(x) = \left(\dfrac{7x-8}{9-2x}\right)^3$; $I = \mathbf{R} \setminus \left\{\dfrac{9}{2}\right\}$.
2. $f(x) = \left(\dfrac{-x^2+4x+6}{x^2-1}\right)^4$; $I = \mathbf{R} \setminus \{-1;1\}$.
3. $f(x) = \left(\dfrac{\mathrm{e}^{5x-8}}{x^2-7x+12}\right)^4$; $I = \mathbf{R} \setminus \{3;4\}$.
4. $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x+4}{5-x}}$; $I = [-2;5[$.
5. $f(x) = \sqrt{\mathrm{e}^x(x^2-4x+15)}$; $I = \mathbf{R}$.
6. $f(x) = \mathrm{e}^{(x-4)^3\sqrt{-4x+2}}$; $I = \left]-\infty;\dfrac{1}{2}\right]$.

Correction

1. f est dérivable sur I.

   Soit $x \in I$. Posons $u(x) = \dfrac{7x-8}{9-2x}$.

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{7(9-2x)-(-2)(7x-8)}{(9-2x)^2} \\ &= \frac{63-14x+14x-16}{(9-2x)^2} \\ &= \frac{47}{(9-2x)^2} \end{aligned}$$

   Ainsi, $\boxed{f'(x) = \dfrac{47}{(9-2x)^2} \times 3\left(\dfrac{7x-8}{9-2x}\right)^2.}$

2. f est dérivable sur I.

   Soit $x \in I$. Posons $u(x) = \dfrac{-x^2+4x+6}{x^2-1}$.

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{(-2x+4)(x^2-1)-2x(-x^2+4x+6)}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{-2x^3+2x+4x^2-4+2x^3-8x^2-12x}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{-4x^2-10x-4}{(x^2-1)^2} \end{aligned}$$

   Ainsi, $\boxed{f'(x) = \dfrac{-4x^2-10x-4}{(x^2-1)^2} \times 4\left(\dfrac{-x^2+4x+6}{x^2-1}\right)^3.}$

3. f est dérivable sur I.

   Soit $x \in I$. Posons $u(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{5x-8}}{x^2-7x+12}$.

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{5\mathrm{e}^{5x-8}(x^2-7x+12)-(2x-7)\mathrm{e}^{5x-8}}{(x^2-7x+12)^2} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{5x-8}\big(5x^2-35x+60)-(2x-7)\big)}{(x^2-7x+12)^2} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{5x-8}(5x^2-37x+67)}{(x^2-7x+12)^2} \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{5x-8}(5x^2-37x+67)}{(x^2-7x+12)^2} \times 4\left(\dfrac{\mathrm{e}^{5x-8}}{x^2-7x+12}\right)^3.}$

4. f est dérivable sur $I \setminus \{-2\}$ car $\dfrac{2x+4}{5-x}$ s'annule en $x=-2$.

Soit $x \in I \setminus \{-2\}$. Posons $u(x) = \dfrac{2x+4}{5-x}$.

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{2(5-x)-(-1)(2x+4)}{(5-x)^2} \\ &= \frac{10-2x+2x+4}{(5-x)^2} \\ &= \frac{14}{(5-x)^2} \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{f'(x) = \dfrac{14}{(5-x)^2} \times \dfrac{1}{2\sqrt{\frac{2x+4}{5-x}}}.}$

5. f est dérivable sur I car $\forall x \in \mathbf{R}, x^2-4x+15>0$ (considérer son discriminant).

Soit $x \in I$. Posons $u(x) = \mathrm{e}^x(x^2-4x+15)$.

$$\begin{aligned} u'(x) &= (2x-4)\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x(x^2-4x+15) \\ &= \mathrm{e}^x(x^2-2x+11) \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{f'(x) = \mathrm{e}^x(x^2-2x+11) \times \dfrac{1}{2\sqrt{\mathrm{e}^x(x^2-4x+15)}}.}$

6. f est dérivable sur $I \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ car $-4x+2$ s'annule en $x = \dfrac{1}{2}$.

Soit $x \in I \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$. Posons $u(x) = (x-4)^3\sqrt{-4x+2}$.

$$\begin{aligned} u'(x) &= 3(x-4)^2\sqrt{-4x+2} + (x-4)^3 \times \frac{-4}{2\sqrt{-4x+2}} \\ &= (x-4)^2\left(3\sqrt{-4x+2} + \frac{-2(x-4)}{\sqrt{-4x+2}}\right) \\ &= (x-4)^2\left(\frac{3(-4x+2)}{\sqrt{-4x+2}} + \frac{-2(x-4)}{\sqrt{-4x+2}}\right) \\ &= (x-4)^2\left(\frac{-14x+14}{\sqrt{-4x+2}}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{f'(x) = (x-4)^2\left(\dfrac{-14x+14}{\sqrt{-4x+2}}\right) \times \mathrm{e}^{(x-4)^3\sqrt{-4x+2}}.}$

EXERCICE 2

Déterminer, dans chaque cas, la limite de (u_n) de terme général donné quand $n \to +\infty$.

1. $u_n = n^2 - 4n + 12$

2. $u_n = \dfrac{2n^7 - 11 - \frac{1}{n}}{n^7 + 11}$

3. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^4}$

4. $u_n = \dfrac{n+3}{n^2+6}\cos(2n^2-4)$.

CORRECTION

1. Soit $n \in \mathbf{N}$.

$u_n = n^2 - 4n + 12 = n^2\left(1 - \frac{4}{n} + \frac{12}{n^2}\right)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{12}{n^2} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \left(\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\right) \times 1$ par produit.

Finalement, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty.}$

2. Soit $n \neq 0$.

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{2n^7 - 11 - \frac{1}{n}}{n^7 + 11} \\ &= \frac{n^7}{n^7} \frac{2 - \dfrac{11}{n^7} - \frac{1}{n^8}}{1 + \frac{11}{n^7}} \\ &= \frac{2 - \dfrac{11}{n^7} - \frac{1}{n^8}}{1 + \frac{11}{n^7}} \end{aligned}$$

Le numérateur tend vers 2 quand $n \to +\infty$ et le dénominateur vers 1 quand $n \to +\infty$ donc $\boxed{u_n \text{ tend vers } \dfrac{2}{1} = 2 \text{ quand } n \to +\infty.}$

3. Soit $n \neq 0$.

On a :

$$-\frac{1}{n^4} \leqslant \frac{(-1)^n}{n^4} \leqslant \frac{1}{n^4}.$$

En appliquant le théorème des gendarmes, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{n^4} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^4} = 0$, alors $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0.}$

4. Soit $n \in \mathbf{N}$.

On a :

$$-\frac{n+3}{n^2+6} \leqslant \frac{n+3}{n^2+6}\cos(2n^2 - 4) \leqslant \frac{n+3}{n^2+6}.$$

On peut établir que $\dfrac{n+3}{n^2+6} = \dfrac{n(1+\frac{3}{n})}{n(n+\frac{6}{n})} = \dfrac{1+\frac{3}{n}}{n+\frac{6}{n}}$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+3}{n^2+6} = 0$. En appliquant le théorème des gendarmes, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{n+3}{n^2+6} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+3}{n^2+6} = 0$, alors $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0.}$

EXERCICE 3

Soit (c_n) la suite définie, pour tout entier $n \geqslant 1$ par :

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{1}{1\times2\times3} + \frac{1}{2\times3\times4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

1. **a.** Soit un entier k tel que $1 \leqslant n$. Montrer que :

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right)$$

b. Donner une expression simplifiée de c_n.

2. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n$.

Correction

1. **a.**

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{(k+1)(k+2)}{k(k+1)(k+2)}-\frac{k(k+2)}{k(k+1)(k+2)}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{(k(k+2)}{k(k+1)(k+2)}-\frac{(k(k+1)}{k(k+1)(k+2)}\right)\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{(k+1)(k+2)-2k(k+2)+k(k+1)}{k(k+1)(k+2)}\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{k^2+2k+k+2-2k^2-4k+k^2+k}{k(k+1)(k+2)}\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{2}{k(k+1)(k+2)}\\ &= \frac{1}{k(k+1)(k+2)}\end{aligned}$$

b. Soit $n \in \mathbf{N}$.

Par la question 1, on a que :

$$\begin{aligned}c_n &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{1+1}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\\ &= \frac{1}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right).\end{aligned}$$

2. En passant à la limite $\frac{1}{n+1}$ et $\frac{1}{n+2}$, on a que $\boxed{c_n \text{ tend vers } \frac{1}{4}}$ quand n tend vers $+\infty$.