Devoir surveillé 1

Calculatrice autorisée

Samedi 16 septembre 2023

Exercice 1 (7 points)

Un infographiste simule sur ordinateur la croissance d'un bambou. Il prend pour modèle un bambou d'une taille initiale de 1 m dont la taille augmente d'un mois sur l'autre de 5 % auxquels s'ajoutent 20 cm.
Pour tout entier naturel n non nul, on note u_n la taille, exprimée en centimètre, qu'aurait le bambou à la fin du n-ième mois, et $u_0 = 100$.

1. Calculer u_1 et u_2.

2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ou géométrique ?

3. Expliquer pourquoi, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1,05 \times u_n + 20$.

4. Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = u_n + 400$.

- **a.** Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme v_0.
- **b.** Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n.
- **c.** En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 500 \times 1,05^n - 400$.
- **d.** Calculer la taille du bambou, au centimètre près, à la fin du 7$^{\text{e}}$ mois.

5. On considère l'algorithme ci-dessous dans lequel n est un entier naturel et u est un nombre réel.

Algorithme en langage naturel :

```
u ← 100
n ← 0
Tant que u < 200 faire
    u ← 1,05 × u + 20
    n ← n + 1
Fin Tant que
```

Algorithme en langage Python :

```
u = 100
n = 0
While u < 200 :
    u = 1,05 × u + 20
    n = n + 1
```

- **a.** Recopier et compléter le tableau ci-dessous en ajoutant autant de colonnes que nécessaire pour retranscrire l'exécution de l'algorithme.

Test $u < 200$		vrai		...
Valeur de u	100			...
Valeur de n	0			...

- **b.** Quelle est la valeur de la variable n à la fin de l'exécution de l'algorithme ?
  Interpréter le résultat au regard de la situation étudiée dans cet exercice.
- **c.** Modifier les lignes nécessaires dans l'algorithme pour déterminer le nombre de mois qu'il faudrait à un bambou de 50 cm pour atteindre ou dépasser 10 m.

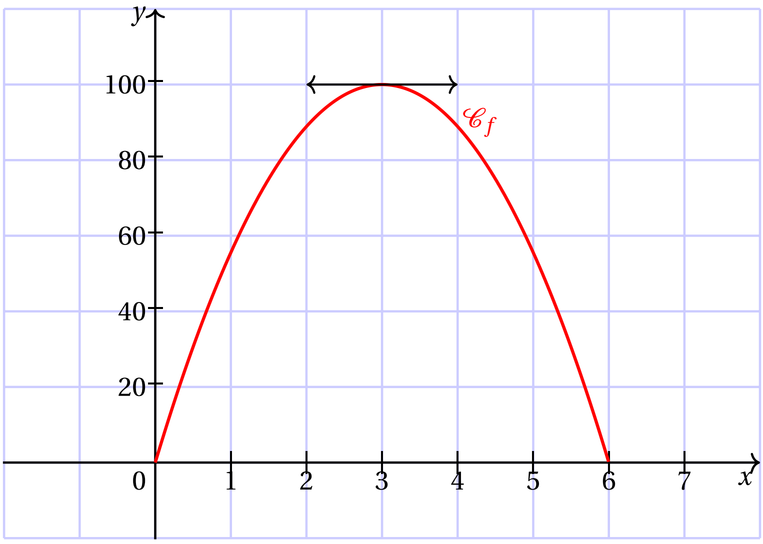
EXERCICE 2 (6 POINTS)

On appelle fonction « *satisfaction* » toute fonction dérivable qui prend ses valeurs entre 0 et 100. Lorsque la fonction « *satisfaction* » atteint la valeur 100, on dit qu'il y a « *saturation* ».
On définit aussi la fonction « *envie* » comme la fonction dérivée de la fonction « *satisfaction* ». On dira qu'il y a « *souhait* » lorsque la fonction « *envie* » est positive ou nulle et qu'il y a « *rejet* » lorsque la fonction « *envie* » est strictement négative.

Dans chaque partie, on teste un modèle de fonction « *satisfaction* » différent.
Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Un étudiant prépare un concours, pour lequel sa durée de travail varie entre 0 et 6 heures par jour. Il modélise sa satisfaction en fonction de son temps de travail quotidien par la fonction « *satisfaction* » f dont la courbe représentative est donnée ci-dessous (x est exprimé en heures).



Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes.

1. Lire la durée de travail quotidien menant à « *saturation* ».

2. Déterminer à partir de quelle durée de travail il y a « *rejet* ».

Partie B

Le directeur d'une agence de trekking modélise la satisfaction de ses clients en fonction de la durée de leur séjour.
On admet que la fonction « *satisfaction* » g est définie sur l'intervalle $[0;30]$ par $g(x) = 12,5x\mathrm{e}^{-0,125x+1}$ (x est exprimé en jour).

1. Démontrer que, pour tout x de l'intervalle $[0;30]$,

$$g'(x) = (12,5 - 1,5625x)\mathrm{e}^{-0,125x+1}.$$

2. Étudier le signe de $g'(x)$ sur l'intervalle $[0;30]$ puis dresser le tableau des variations de g sur cet intervalle.

3. Quelle durée de séjour correspond-elle à l'effet « *saturation* » ?

EXERCICE 3 (7 POINTS)

Dans une entreprise piscicole, un bassin a contient 100 poissons dont 20 gardons et un bassin b contient x gardons et 100 poissons autres que des gardons.
On sait que x est un nombre compris entre 1 et 30.

1. Combien de poissons y a t-il au total ?

2. On choisit, au hasard, un poisson dans l'un des deux bassins.
On considère les événements
- A : « le poisson est pêché dans le bassin a »
- B : « le poisson est pêché dans le bassin b »
- G : « le poisson pêché est un gardon ».

a. Quelle est la probabilité que ce poisson provienne du bassin a ? du bassin b ?

b. Un poisson est pêché dans le bassin a, quelle est la probabilité que ce soit un gardon ?

c. Un poisson est pêché dans le bassin b, quelle est la probabilité que ce soit un gardon ?

3. Déterminer la probabilité que le poisson pêché soit un gardon en fonction de x.

4. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1\ ;\ 30]$ par $f(x) = \dfrac{x+20}{x+200}$.

a. Déterminer la dérivée de la fonction f.

b. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[1\ ;\ 30]$.

c. Déterminer le nombre de gardons qu'il faudrait dans le bassin b pour que la probabilité de pêcher un gardon sur l'ensemble des deux bassins soit égale à $0,2$.

d. Expliquer pourquoi il n'est pas possible d'avoir une chance sur deux de pêcher un gardon sur l'ensemble des deux bassins.