BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2024

MATHÉMATIQUES

Épreuve d'enseignement de spécialité

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherches, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Tournez la page S.V.P.

EXERCICE 1 **5 POINTS**

Lors d'une kermesse, un organisateur de jeux dispose, d'une part, d'une roue comportant quatre cases blanches et huit cases rouges et, d'autre part, d'un sac contenant cinq jetons portant les numéros 1, 2, 3, 4 et 5.
Le jeu consiste à faire tourner la roue, chaque case ayant la même probabilité d'être obtenue, puis à extraire un ou deux jetons du sac selon la règle suivante :

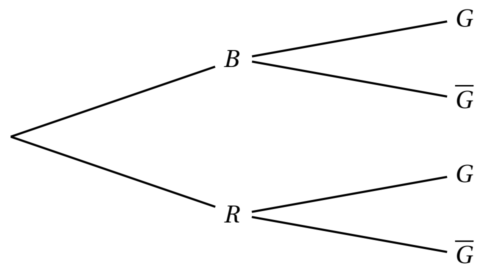
- si la case obtenue par la roue est blanche, alors le joueur extrait un jeton du sac;
- si la case obtenue par la roue est rouge, alors le joueur extrait successivement et sans remise deux jetons du sac.

Le joueur gagne si le ou les jetons tirés portent tous un numéro impair.

1. Un joueur fait une partie et on note B l'évènement « la case obtenue est blanche », R l'évènement « la case obtenue est rouge » et G l'évènement « le joueur gagne la partie ».

a. Donner la valeur de la probabilité conditionnelle $P_B(G)$.

b. On admettra que la probabilité de tirer successivement et sans remise deux jetons impairs est égale à $0,3$.
Recopier et compléter l'arbre de probabilité suivant :



2. a. Montrer que $P(G) = 0,4$.

b. Un joueur gagne la partie.
Quelle est la probabilité qu'il ait obtenu une case blanche en lançant la roue?

3. Les évènements B et G sont-ils indépendants? Justifier.

4. Un même joueur fait dix parties. Les jetons tirés sont remis dans le sac après chaque partie.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées.

a. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.

b. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, que le joueur gagne exactement trois parties sur les dix parties jouées.

c. Calculer $P(X \geqslant 4)$ arrondie à 10^{-3} près.
Donner une interprétation du résultat obtenu.

5. Un joueur fait n parties et on note p_n la probabilité de l'évènement « le joueur gagne au moins une partie ».

a. Montrer que $p_n = 1 - 0,6^n$.

b. Déterminer la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle la probabilité de gagner au moins une partie est supérieure ou égale à $0,99$.

EXERCICE 2 **5 POINTS**

Partie A

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$h(x) = 1 + \frac{\ln(x)}{x}.$$

1. Déterminer la limite de la fonction h en 0.
2. Déterminer la limite de la fonction h en $+\infty$.
3. On note h' la fonction dérivée de h. Démontrer que, pour tout nombre réel x de $]0\,;\,+\infty[$, on a :

$$h'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}.$$

4. Dresser le tableau de variations de la fonction h sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
5. Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0\,;\,+\infty[$.
   Justifier que l'on a : $0,5 < \alpha < 0,6$.

Partie B

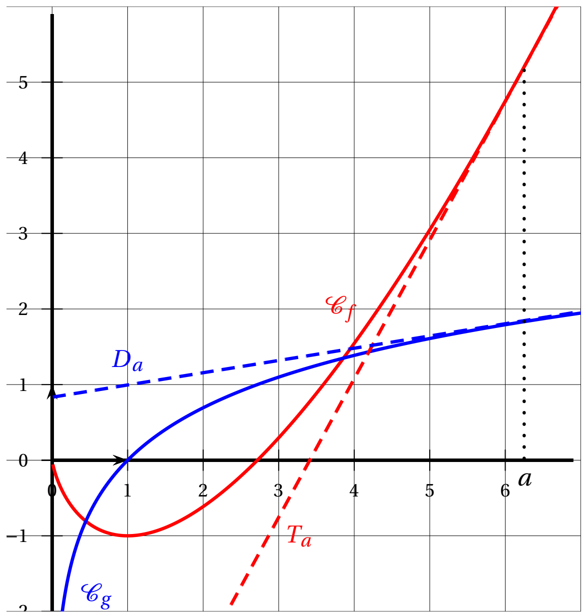
Dans cette partie, on considère les fonctions f et g définies sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln(x) - x; \qquad g(x) = \ln(x).$$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentant respectivement les fonctions f et g dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{i},\,\vec{j}\right)$.
Pout tout nombre réel a strictement positif, on appelle :

- T_a la tangente à $\mathscr{C}_f$ en son point d'abscisse a;
- D_a la tangente à $\mathscr{C}_g$ en son point d'abscisse a.

Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ainsi que deux tangentes T_a et D_a sont représentées ci-dessous.



On recherche d'éventuelles valeurs de a pour lesquelles les droites T_a et D_a sont perpendiculaires.
Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

1. Justifier que la droite D_a a pour coefficient directeur $\dfrac{1}{a}$.
2. Justifier que la droite T_a a pour coefficient directeur $\ln(a)$.

On rappelle que dans un repère orthonormé, deux droites de coefficients directeurs respectifs m et m'sont perpendiculaires si et seulement si $mm' = -1$.

3. Démontrer qu'il existe une unique valeur de a, que l'on identifiera, pour laquelle les droites T_a et D_a sont perpendiculaires.

EXERCICE 3 **5 POINTS**

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k}\right)$.
On considère les points A(5 ; 0 ; −1), B(1 ; 4 ; −1), C(1 ; 0 ; 3), D(5 ; 4 ; 3) et E(10 ; 9 ; 8).

1. **a.** Soit R le milieu du segment [AB].
Calculer les coordonnées du point R ainsi que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

   b. Soit $\mathscr{P}_1$ le plan passant par le point R et dont $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}_1$ est :

$$x - y - 1 = 0.$$

   c. Démontrer que le point E appartient au plan $\mathscr{P}_1$ et que EA = EB .

2. On considère le plan $\mathscr{P}_2$ d'équation cartésienne $x - z - 2 = 0$.

   a. Justifier que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants.

   b. On note Δ la droite d'intersection de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.
Démontrer qu'une représentation paramétrique de la droite Δ est :

$$\left\{\begin{array}{lcr} x & = & 2+t \\ y & = & 1+t \\ z & = & t \end{array}\right. \quad (t \in \mathbf{R}).$$

3. On considère le plan $\mathscr{P}_3$ d'équation cartésienne $y + z - 3 = 0$.
Justifier que la droite Δ est sécante au plan $\mathscr{P}_3$ en un point Ω dont on déterminera les coordonnées.

Si S et T sont deux points distincts de l'espace, on rappelle que l'ensemble des points M de l'espace tels que MS = MT est un plan, appelé plan médiateur du segment [ST]. On admet que les plans $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ sont les plans médiateurs respectifs des segments [AB], [AC] et [AD].

4. **a.** Justifier que ΩA = ΩB = ΩC = ΩD.

   b. En déduire que les points A, B, C et D appartiennent à une même sphère dont on précisera le centre et le rayon.

EXERCICE 4 **5 POINTS**

Les quatre parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

On considère un cadenas dont le code d'ouverture est composé de 6 chiffres.

1. Déterminer le nombre de codes possibles.
2. Déterminer le nombre de codes possibles dont tous les chiffres sont différents.
3. Déterminer le nombre de codes possibles dont tous les chiffres sont différents commençant par 9 et se terminant par 5.

Partie B

Dénombrer tous les entiers naturels à 6 chiffres qu'on peut former à partir des chiffres compris entre 1 et 6.

Partie C

Un sac contient :

- 4 jetons verts, numérotés de 1 à 4 ;
- 2 jetons rouges numérotés 1 et 2 ;
- 3 jetons bleus numérotés de 1 à 3.

Un tirage est un ensemble de 3 jetons extraits simultanément de ce sac.

1. Déterminer le nombre de tirages possibles.
2. Déterminer le nombre de tirages possibles dont les 3 jetons sont de même couleur.
3. Déterminer le nombre de tirages possibles dont les 3 jetons sont de couleurs différentes.

Partie D

On dispose d'un jeu de 32 cartes, composé entre autres de 4 cartes « As » et 8 cartes « Pique ». Une main de 3 cartes est obtenue en tirant 3 cartes, successivement et sans remise, de ce jeu de 32 cartes.

1. Déterminer le nombre de mains possibles.
2. Déterminer le nombre de mains possibles ne contenant ni « Pique », ni « As ».
3. Déterminer le nombre de mains possibles contenant au moins une carte « As ».
4. Déterminer le nombre de mains possibles contenant au plus une carte « Pique ».