BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2024

MATHÉMATIQUES

Épreuve d'enseignement de spécialité

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.
Les traces de recherches, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

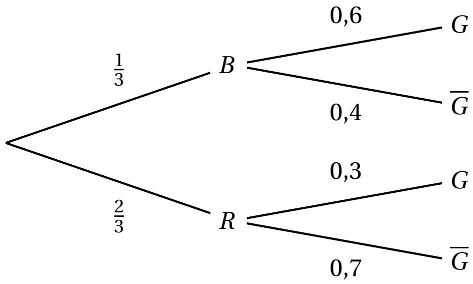
Tournez la page S.V.P.

EXERCICE 1 **7 POINTS**

1. R l'évènement « la case obtenue est rouge » et G l'évènement « le joueur gagne la partie ».

   a. Si la case est blanche on tire 1 seul jeton; comme il y a 3 résultats impairs sur 5 numéros on a $P_B(G) = \frac{3}{5} = \frac{6}{10} = 0,6$.

   b. Tout d'abord on a $P(B) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ et donc $P(R) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.
   Si la case est rouge on tire successivement deux jetons : il y a $5 \times 4 = 20$ issues différentes depuis 1–2 jusqu'à 5-4 et parmi celles-ci les issues gagnantes : 1-3 ; 1-5 ; 3-1 ; 3-5 ; 5-1 et 5-3.
   On a donc $P_R(G) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 0,3$ (voir l'énoncé).
   On peut donc compléter l'arbre pondéré :



2. **a.** D'après la loi des probabilités totales :
   $P(G) = P(B \cap G) + P(R \cap G)$
   - $P(B \cap G) = P(B) \times P_B(G) = \frac{1}{3} \times 0,6 = \frac{0,6}{3} = 0,2$;
   - $P(R \cap G) = P(R) \times P_R(G) = \frac{2}{3} \times 0,3 = \frac{0,6}{3} = 0,2$.

   Donc $P(G) = 0,2 + 0,2 = 0,4$.

   b. Il faut trouver $P_G(B) = \frac{P(G \cap B)}{P(G)} = \frac{P(B \cap G)}{P(G)} = \frac{0,2}{0,4} = \frac{2}{=}0,5$.

3. - $P(B) \times P(G) = \frac{1}{3} \times 0,4 = \frac{0,4}{3} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$;
   - $P(B \cap G) = \frac{1}{3} \times 0,6 = 0,2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

   Donc $P(B) \times P(G) \neq P(B \cap G)$: les évènements ne sont pas indépendants.

4. Un mÃłme joueur fait dix parties. Les jetons tirés sont remis dans le sac après chaque partie.
   On note X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées.

   a. Les 10 épreuves sont indépendantes et à chacune la probabilité de gagner est égale à 0,4. La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale $\mathcal{B}(10 ; 0,4)$.

   b. On a $P(X = 3 = \binom{10}{3} \times 0,4^3 \times (1 - 0,4)^7 \approx 0,215$ au millième près.

   c. La calculatrice donne $P(X \leqslant 3) \approx 0,3823$, donc $P(X \geqslant 4) \approx 0,6177$, soit 0,618 au millième près.
   Il y a plus de 6 chances sur 10 de gagner au moins 4 parties.

5. **a.** On a $p_n = P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,6^n$.

   b. Il faut trouver le plus petit entier n tel que $p_n \geqslant 0,99$, soit :
   $1 - 0,6^n \geqslant 0,99 \iff 0,01 \geqslant 0,6^n$ soit par croissance de la fonction logarithme : $\ln 0,01 \geqslant n \ln 0,6 \iff \frac{\ln 0,01}{\ln 0,6} \leqslant n$, car $\ln 0,6 < 0$.
   Or $\frac{\ln 0,01}{\ln 0,6} \approx 9,02$.
   Il faut donc jouer au moins 10 parties pour avoir une probabilité d'en gagner une avec une probabilité d'au moins 99 %.

EXERCICE 2 **5 POINTS**

Partie A

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par : $h(x) = 1 + \dfrac{\ln(x)}{x}$.

1. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty$, et $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$.

Par produit on déduit que $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$ et donc que $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} h(x) = -\infty$.

2. On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} h(x) = 1$

3. La fonction h est dérivable comme quotient de fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle : $h'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\times x - 1\times\ln x}{x^2} = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

4. Comme $x^2 > 0$ pour $x \in]0\,;\,+\infty[$ le signe de $h'(x)$ est celui du numérateur $1-\ln x$:

- $1-\ln x > 0 \iff 1 > \ln x \iff \mathrm{e} > x$:
  la fonction h est donc strictement croissante sur $]0\,;\,\mathrm{e}[$;
- $1-\ln x < 0 \iff 1 < \ln x \iff \mathrm{e} < x$:
  la fonction h est donc strictement décroissante sur $]\mathrm{e}\,;\,+\infty[$;
- $1-\ln x = 0 \iff 1 = \ln x \iff \mathrm{e} = x$:
  la fonction h a un maximum $f(\mathrm{e}) = 1 + \dfrac{\ln \mathrm{e}}{\mathrm{e}} = 1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

D’oÃź le tableau de variations de h :

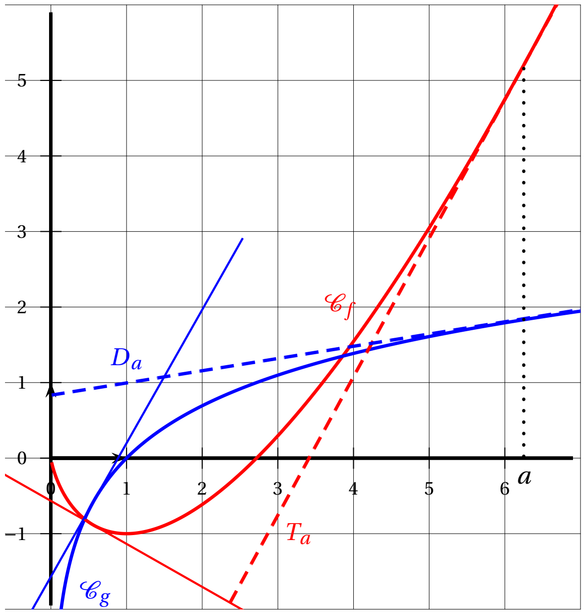
x	0		e		$+\infty$
$h'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
h	$\Vert\ -\infty$	$\nearrow$	$1+\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	1

5. Comme $1+\frac{1}{\mathrm{e}} > 1 > 0$, le tableau de variations montre que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]0\,;\,\mathrm{e}[$.

On a $f(1) = 1 + \dfrac{0}{1} = 1$, donc $0 < \alpha < 1$;
La calculatrice donne : $f(0,5) \approx -0,4$ et $f(0,6) \approx 0,15$, donc $0,5 < \alpha < 0,6$.

Partie B

Soit les fonctions f et g définies sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x\ln(x) - x$ et $g(x) = \ln(x)$.



1. La fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle :

$f'(x) = \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x)$

Donc le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point de la courbe d'abscisse a est égal à $f'(a) = \ln(a)$.

2. La fonction g est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle : $g'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Donc le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point de la courbe d'abscisse a est égal à $g'(a) = \dfrac{1}{a}$.

3. Le produit des coefficients directeurs est égal à -1, soit :

$\ln(a) \times \dfrac{1}{a} = -1 \iff \dfrac{\ln(a)}{a} = -1 \iff 1 + \dfrac{\ln(a)}{a} = 0 \iff h(a) = 0$

et on a vu à la fin de la partie I que cette équation n'avait qu'une solution $a = \alpha$: il existe une seule valeur de a telle que les droites T_a et D_a sont perpendiculaires : $a = \alpha$. Voir la figure.

EXERCICE 3 **6 POINTS**

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O} ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
On considère les points A(5 ; 0 ; −1), B(1 ; 4 ; −1), C(1 ; 0 ; 3), D(5 ; 4 ; 3) et E(10 ; 9 ; 8).

1. a. • On a R(3 ; 2 ; −1) ;
   • $\overrightarrow{\text{AB}} \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   b. Si $\overrightarrow{\text{AB}}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}_1$ on sait qu'une équation de ce plan est :
   $-4x + 4y + 0z = d$, avec $d \in \mathbf{R}$.
   Comme R(3 ; 2 ; −1) $\in \mathscr{P}_1 \iff -12 + 8 + 0 = d \iff d = -4$.
   Donc $M(x ; y ; z) \in \mathscr{P}_1 \iff -4x + 4y = -4 \iff x - y - 1 = 0$.

   c. Démontrer que le point E appartient au plan $\mathscr{P}_1$ et que EA = EB. On a E(10 ; 9 ; 8) $\in \mathscr{P}_1 \iff 10 - 9 - 1 = 0$: cette égalité est vraie.
   D'autre part $\overrightarrow{\text{EA}} \begin{pmatrix} -5 \\ -9 \\ -9 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{EB}} \begin{pmatrix} -9 \\ -5 \\ -9 \end{pmatrix}$.
   On en déduit : $\text{EA}^2 = 25 + 81 + 81 = 187$ et $\text{EA}^2 = 81 + 25 + 81 = 187$.
   $\text{EA}^2 = \text{EB}^2 \Rightarrow \text{EA} = \text{EB}$.

2. On considère le plan $\mathscr{P}_2$ d'équation cartésienne $x - z - 2 = 0$.

   a. On a vu que le plan $\mathscr{P}_1$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{\text{AB}} \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\mathscr{P}_2$ a pour vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.
   Ces deux vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires, donc $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ ne sont pas parallèles, ils sont donc sécants.

   b. Si $M(x ; y ; z)$ est commun aux deux plans ses coordonnées vérifient les équations des deux plans, donc le système :
   $\left\{\begin{array}{lcl} x - y - 1 & = & 0 \\ x - z - 2 & = & 0 \end{array}\right.$. En posant $z = t$ le système devient :
   $$\left\{\begin{array}{lcl} x - y - 1 & = & 0 \\ x - z - 2 & = & 0 \\ z & = & t \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x - 1 & = & y \\ x & = & z + 2 \\ z & = & t \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x - 1 & = & y \\ x & = & t + 2 \\ z & = & t \end{array}\right. \iff$$
   $$\left\{\begin{array}{lcl} t + 2 - 1 & = & y \\ x & = & t + 2 \\ z & = & t \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & t + 2 \\ y & = & t + 1 \\ z & = & t \end{array}\right., \text{ avec } t \in \mathbf{R}.$$

   Si $\Omega(x ; y ; z)$ est commun à la droite Δ et au plan $\mathscr{P}_3$ ses coordonnées vérifient l'équation du plan et les équations paramétriques de la droite, soit le système :
   $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & t + 2 \\ y & = & t + 1 \\ z & = & t \\ y + z - 3 & = & 0 \end{array}\right.$. En remplaçant x, y, z par leurs expressions en fonction de t dans l'équation du plan on obtient :
   $t + 1 + t - 3 = 0 \iff 2t - 2 = 0 \iff 2t = 2 \iff t = 1$.
   On a donc Ω (3 ; 2 ; 1).

Si S et T sont deux points distincts de l'espace, on rappelle que l'ensemble des points M de l'espace tels que MS = MT est un plan, appelé plan médiateur du segment [ST]. On admet que les plans $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ sont les plans médiateurs respectifs des segments [AB], [AC] et [AD].

3. a. Sans admettre que les plans $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ sont les plans médiateurs respectifs des segments [AB], [AC] et [AD], on peut calculer :

$\overrightarrow{\Omega A}\begin{pmatrix}2\\-2\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\Omega B}\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\Omega C}\begin{pmatrix}-2\\-2\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\Omega D}\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$.

On a donc $\Omega A^2 = 4+4+4 = 12$, $\Omega B^2 = 12$, $\Omega C^2 = 12$, $\Omega D^2 = 12$ et par conséquent :
$\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D = \sqrt{12} = \sqrt{4\times 3} = 2\sqrt{3}$.

b. Le résultat précédent montre que Ω est équidistant de A, B, C et D donc est le centre de la sphère de rayon $2\sqrt{3}$ contenant A, B, C et D.

EXERCICE 4 **6 POINTS**

Les quatre parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

L'ordre COMPTE.

1. Il y a 10^6 codes possibles.
2. On dénombre chiffre par chiffre : du premier au sixième. Le premier a 10 possibilités, le second 9, le troisième 8, etc...

   Ainsi, il y a $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = \dfrac{10!}{4!} = 151\,200$ codes possibles dont tous les chiffres sont différents.
3. Le premier et sixième chiffres sont fixés, seuls les quatre centraux comptent avec $8 \times 7 \times 6 \times 5$ combinaisons strictes de chiffres différents de 5 et 9.

   Ainsi, il y a $8 \times 7 \times 6 \times 5 = \dfrac{8!}{4!} = 1\,680$ codes possibles.

Partie B

L'ordre COMPTE.
Il y en 6^6.

Partie C

L'ordre NE COMPTE PAS.

Un tirage est un ensemble de 3 jetons extraits simultanément de ce sac.

1. Il y a 9 jetons en tout. Il y a donc $\dbinom{9}{3} = 84$ possibilités de tirages de 3 jetons sans remise.
2. Si les 3 jetons sont de même couleur, il faut additionner le nombre de tirages de trois rouges, trois verts et trois bleus.

   Le premier cas est impossible, le second possède $\dbinom{4}{3} = 4$ possibilités et le dernier $\dbinom{3}{3} = 1$ possibilité.

   Il y a 5 possibilités pour un tirage où les 3 jetons sont de même couleur.
3. Si les 3 jetons sont de couleurs différentes, alors chacun des jetons est tiré dans son ensemble de couleur respectif.

   Il y a $4 \times 2 \times 3 = 24$ combinaisons.

Partie D

L'ordre NE COMPTE PAS.

1. Le nombre de mains possibles est égal à $\dbinom{32}{3} = 4\,960$.
2. Il faut extraire des 32 cartes les 8 Piques ainsi les 3 As de Cœur, Trèfle et Carreau.

   Ainsi, le nombre de mains possibles est égal à $\dbinom{21}{3} = 1\,330$.
3. Il y a $\dbinom{28}{3} = 3\,276$ mains possibles sans As donc $4\,960 - 3\,276 = 1\,684$ mains avec au moins un As.
4. Il y a $\dbinom{24}{3} = 2\,024$ mains possibles sans Pique et $8 \times \dbinom{24}{2} = 2\,208$ mains possibles avec un seul Pique.

   En additionnant, on obtient $4\,232$ mains avec au plus un Pique.