BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2024

MATHÉMATIQUES

Épreuve d'enseignement de spécialité

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherches, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Tournez la page S.V.P.

EXERCICE 1 **5 POINTS**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. On considère les suites (u_n) et (v_n) telles que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \qquad \text{et} \qquad v_n = 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

On considère de plus une suite (w_n) qui, pour tout entier naturel n, vérifie $u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$.
On peut affirmer que :

a. Les suites (u_n) et (v_n) sont géométriques.
b. La suite (w_n) converge vers 1.
c. La suite (u_n) est minorée par 1.
d. La suite (w_n) est croissante.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par : $f(x) = xe^{x^2}$.
La fonction dérivée de f est la fonction f' définie sur $\mathbf{R}$ par :

a. $f'(x) = 2xe^{x^2}$
b. $f'(x) = (1+2x)e^{x^2}$
c. $f'(x) = \left(1+2x^2\right)e^{x^2}$
d. $f'(x) = \left(2+x^2\right)e^{x^2}$.

3. Que vaut $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{2x^2-2x+1}$?

a. -1 **b.** 0 **c.** $\frac{1}{2}$ **d.** $+\infty$.

4. On considère une fonction h continue sur l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$ telle que

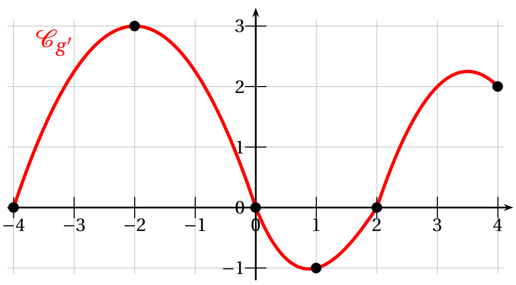
$$h(-1) = 0 \qquad h(0) = 2 \qquad h(1) = 0.$$

On peut affirmer que :

a. La fonction h est croissante sur l'intervalle $[-1\ ;\ 0]$.
b. La fonction h est positive sur l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$.
c. Il existe au moins un nombre réel a dans l'intervalle $[0\,;\,1]$ tel que $h(a) = 1$.
d. L'équation $h(x) = 1$ admet exactement deux solutions dans l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$.

5. On suppose que g est une fonction dérivable sur l'intervalle $[-4\ ;\ 4]$. On donne ci-contre la représentation graphique de sa fonction dérivée g'.
On peut affirmer que :

a. g admet un maximum en -2.
b. g est croissante sur l'intervalle $[1\,;\,2]$.
c. g est convexe sur l'intervalle $[1\,;\,2]$.
d. g admet un minimum en 0.



EXERCICE 2 **5 POINTS**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10000$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,95u_n + 200.$$

1. Calculer u_1 et vérifier que $u_2 = 9415$.
2. **a.** Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n :

$$u_n > 4000.$$

   b. On admet que la suite (u_n) est décroissante. Justifier qu'elle converge.
3. Pour tout entier naturel n, on considère la suite (v_n) définie par : $v_n = u_n - 4000$.
   a. Calculer v_0.
   b. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison égale à $0,95$.
   c. En déduire que pour tout entier naturel n :

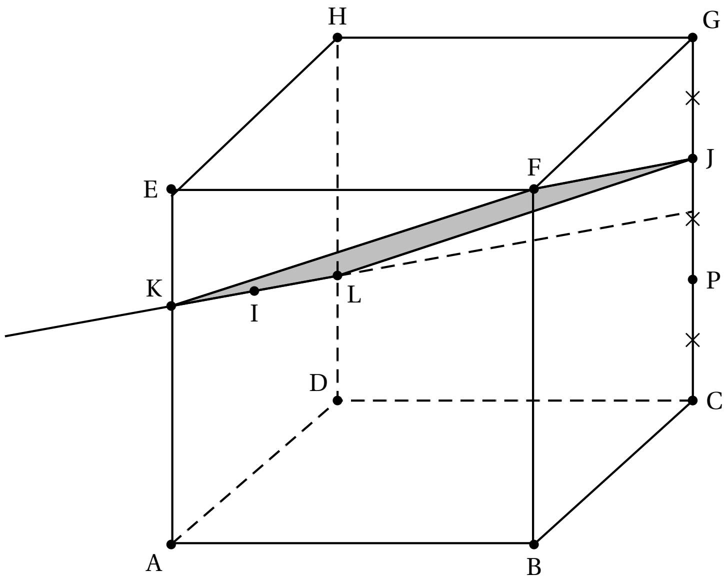
$$u_n = 4000 + 6000 \times 0,95^n.$$

   d. Quelle est la limite de la suite (u_n) ? Justifier la réponse.
4. En 2020, une espèce animale comptait 10 000 individus. L'évolution observée les années précédentes conduit à estimer qu'à partir de l'année 2021, cette population baissera de 5 % chaque début d'année.
   Pour ralentir cette baisse, il a été décidé de réintroduire 200 individus à la fin de chaque année, à partir de 2021.
   Une responsable d'une association soutenant cette stratégie affirme que : « l'espèce ne devrait pas s'éteindre, mais malheureusement, nous n'empêcherons pas une disparition de plus de la moitié de la population ».
   Que pensez-vous de cette affirmation ? Justifier la réponse.

EXERCICE 3 **5 POINTS**

$ABCDEFGH$ est un cube. I est le centre de la face $ADHE$ et J est un point du segment $[CG]$.
Il existe donc $a \in [0\ ;\ 1]$ tel que $\overrightarrow{\text{CJ}} = a\overrightarrow{\text{CG}}$.
On note (d) la droite passant par I et parallèle à (FJ).
On note K et L les points d'intersection de la droite (d) et des droites (AE) et (DH).
On se place dans le repère $\left(\text{A}\ ;\ \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}, \overrightarrow{\text{AE}}\right)$.

Partie A : Dans cette partie, $a = \dfrac{2}{3}$



1. Donner les coordonnées des points F, I et J.
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d).
3. **a.** Montrer que le point de coordonnées $\left(0\ ;\ 0\ ;\ \dfrac{2}{3}\right)$ est le point K.

   b. Déterminer les coordonnées du point L, intersection des droites (d) et (DH).
4. **a.** Démontrer que le quadrilatère $FJLK$ est un parallélogramme.

   b. Démontrer que le quadrilatère $FJLK$ est un losange.

   c. Le quadrilatère FJLK est-il un carré ?

Partie B : Cas général

On admet que les coordonnées des points K et L sont : $K\left(0\ ;\ 0\ ;\ 1 - \dfrac{a}{2}\right)$ et $L\left(0\ ;\ 1\ ;\ \dfrac{a}{2}\right)$.
On rappelle que $a \in [0\ ;\ 1]$.

1. Déterminer les coordonnées de J en fonction de a.
2. Montrer que le quadrilatère $FJLK$ est un parallélogramme.
3. Existe-t-il des valeurs de a telles que le quadrilatère FJLK soit un losange ? Justifier.
4. Existe-t-il des valeurs de a telles que le quadrilatère FJLK soit un carré ? Justifier.

EXERCICE 4 **5 POINTS**

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & v_0 = 1 \\ u_{n+1} & = & u_n + v_n \\ v_{n+1} & = & 2u_n + v_n \end{array}\right.$$

Dans toute la suite de l'exercice, on **admet** que les suites (u_n) et (v_n) **sont strictement positives**.

1. **a.** Calculez u_1 et v_1.

   b. Démontrer que la suite (v_n) est strictement croissante, puis en déduire que, pour tout entier naturel n, $v_n \geqslant 1$.

   c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant n+1$.

   d. En déduire la limite de la suite (u_n).

2. On pose, pour tout entier naturel n :

$$r_n = \frac{v_n}{u_n}.$$

   On admet que :

$$r_n^2 = 2 + \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}$$

   a. Démontrer que pour tout entier naturel n :

$$-\frac{1}{u_n^2} \leqslant \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leqslant \frac{1}{u_n^2}.$$

   b. En déduire :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}.$$

   c. Déterminer la limite de la suite $\left(r_n^2\right)$ et en déduire que (r_n) converge vers $\sqrt{2}$.

   d. Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$r_{n+1} = \frac{2+r_n}{1+r_n}.$$

   e. On considère le programme suivant écrit en langage Python :

```
def seuil() :
    n = 0
    r = 1
    while abs(r-sqrt(2)) > 10**(-4) :
        r = (2+r)/(1+r)
        n = n+1
    return n
```

   (abs désigne la valeur absolue, sqrt la racine carrée et 10** (-4) représente 10^{-4}).
   La valeur de n renvoyée par ce programme est 5.
   À quoi correspond-elle ?