BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2024

MATHÉMATIQUES

Épreuve d'enseignement de spécialité

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherches, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Tournez la page S.V.P.

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni nâenlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification nâest demandée.

1. On considère les suites (u_n) et (v_n) telles que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \qquad \text{et} \qquad v_n = 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

On considère de plus une suite (w_n) qui, pour tout entier naturel n, vérifie $u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$.

On peut affirmer que :

a. Les suites (u_n) et (v_n) sont géométriques.
b. La suite (w_n) converge vers 1.
c. La suite (u_n) est minorée par 1.
d. La suite (w_n) est croissante.

Application directe du théorème dit « des gendarmes ».

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par : $f(x) = xe^{x^2}$.

La fonction dérivée de f est la fonction f' définie sur $\mathbf{R}$ par :

a. $f'(x) = 2xe^{x^2}$
b. $f'(x) = (1+2x)e^{x^2}$
c. $f'(x) = (1+2x^2)e^{x^2}$
d. $f'(x) = (2+x^2)e^{x^2}$.

$f'(x) = 1 \times e^{x^2} + x \times 2xe^{x^2} = \left(1+2x^2\right)e^{x^2}$

3. Que vaut $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{2x^2-2x+1}$?

a. -1
b. 0
c. $\frac{1}{2}$
d. $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{2x^2-2x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(2-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{1}{x^2}}{2-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}$$

4. On considère une fonction h continue sur l'intervalle $[-1\,;\,1]$ telle que

$$h(-1) = 0 \qquad h(0) = 2 \qquad h(1) = 0.$$

On peut affirmer que :

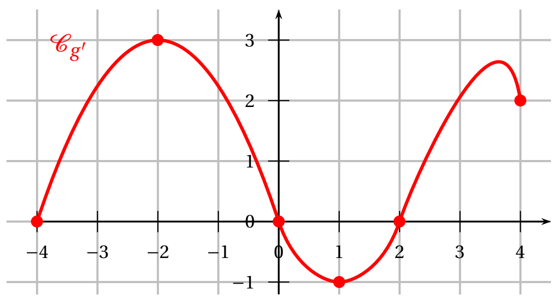
a. La fonction h est croissante sur l'intervalle $[-1\,;\,0]$.
b. La fonction h est positive sur l'intervalle $[-1\,;\,1]$.
c. Il existe au moins un nombre réel a dans l'intervalle $[0; 1]$ tel que $h(a) = 1$.
d. l'équation $h(x) = 1$ admet exactement deux solutions dans l'intervalle $[-1\,;\,1]$.

Application du théorème des valeurs intermédiaires sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

5. On suppose que g est une fonction dérivable sur l'intervalle $[-4\,;\,4]$. On donne ci-contre la représentation graphique de sa **fonction dérivée** g'.

On peut affirmer que :

a. g admet un maximum en -2.
b. g est croissante sur l'intervalle $[1\,;2]$.
c. g est convexe sur l'intervalle $[1\,;2]$.
d. g admet un minimum en 0.



La fonction g' est croissante sur l'intervalle $[1\,;\,2]$, donc la fonction g est convexe sur cet intervalle.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

1. • $u_1 = 0,95 \times u_0 + 200 = 0,95 \times 10\,000 + 200 = 9\,500 + 200 = 9\,700$.Calculer u_1 et vérifier que $u_2 = 9\,415$.
   • $u_2 = 0,95 \times u_1 + 200 = 0,95 \times 9\,700 + 200 = 9\,215 + 200 = 9\,415$.

2. **a.** On démontre par récurrence, que pour tout entier naturel n : $u_n > 4\,000$.
   Initialisation : $u_0 = 10\,000 > 4\,000$: l'inégalité est vraie au rang 0 ;
   Hérédité : supposons que pour $n \in \mathbf{N}$, on ait $u_n > 4\,000$, alors par produit par $0,95 > 0$, on a $0,95u_n > 0,95 \times 4\,000$, soit :
   $0,95u_n > 3\,800$, et en ajoutant 200 à chaque membre :
   $0,95u_n + 200 > 3\,800 + 200$, c'est-à-dire $u_{n+1} > 4\,000$: la relation est vraie au rang $n+1$.
   Conclusion : l'inégalité est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \in \mathbf{N}$, elle est vraie au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence $u_n > 4\,000$ quel que soit le naturel n.

   b. On admet que la suite (u_n) est décroissante. Justifier qu'elle converge. On sait que si la suite est décroissante et minorée par 4 000, elle converge vers une limite ℓ, avec $\ell \geqslant 4\,000$.

3. **a.** Pour $n = 0$, on a $v_0 = u_0 - 4\,000 = 10\,000 - 4\,000 = 6\,000$.

   b. Au choix :
   Méthode 1 : pour $n \in \mathbf{N}$, on a :
   $v_{n+1} = u_{n+1} - 4\,000 = 0,95u_n + 200 - 4\,000 = 0,95u_n - 3\,800 = 0,95\left(u_n - \dfrac{3\,800}{0,95}\right) = 0,95\,(u_n - 4\,000) = 0,95v_n$.
   L'égalité $v_{n+1} = 0,95v_n$ vraie quel que soit $n \in \mathbf{N}$ montre que la suite (v_n) est géométrique de raison égale à $0,95$.
   Méthode 2 : pour $n \in \mathbf{N}$, on a vu que $u_n > 4\,000$, donc $v_n = u_n - 4\,000 > 0$.
   On peut donc calculer : $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{u_{n+1} - 4\,000}{u_n - 4\,000} = \dfrac{0,95u_n + 200 - 4\,000}{u_n - 4\,000} =$
   $\dfrac{0,95u_n - 3\,800}{u_n - 4\,000} = \dfrac{0,95u_n - 3\,800}{u_n - 4\,000} = \dfrac{0,95\left(u_n - \frac{3\,800}{0,95}\right)}{u_n - 4\,000} = \dfrac{0,95\,(u_n - 4\,000)}{u_n - 4\,000} = 0,95$.
   Cette égalité vraie pour tout naturel n, montre que la suite (v_n) est géométrique de raison égale à $0,95$.

   c.
   $$u_n = 4\,000 + 6\,000 \times 0,95^n.$$
   D'après le résultat précédent, on sait que que pour tout $n \in \mathbf{N}$,
   $v_n = v_0 \times 0,95^n = 6\,000 \times 0,95^n$.
   Or $v_n = u_n - 4\,000 \iff u_n = v_n + 4\,000 = 6\,000 \times 0,95^n + 4\,000$.

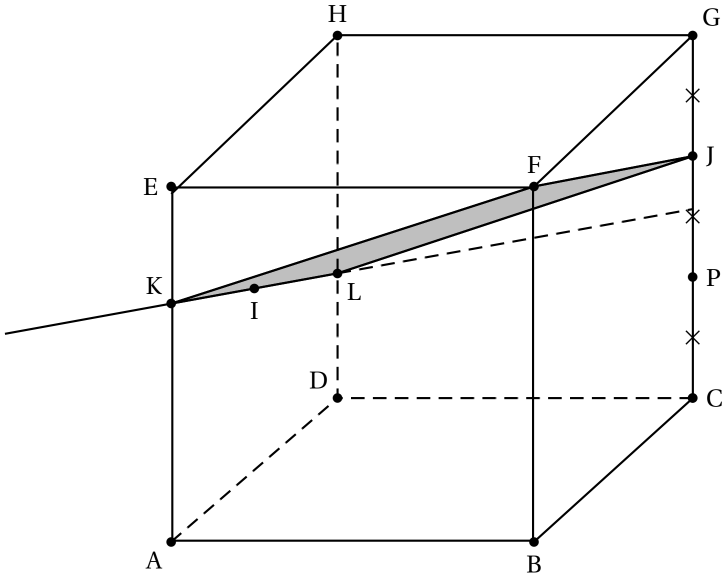
   d. Comme $0 < 0,95 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,95^n = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 6\,000 \times 0,95^n = 0$, d'oÃź $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 4\,000$ (par somme de limites).

4. u_n est égal au nombre d'individus de l'espèce animale au rang n ; d'après le résultat précédent ce nombre va diminuer et se rapprocher de 4 000 soit moins de la moitié de la population initiale : le responsable a raison.

EXERCICE 3 **6 POINTS**

ABCDEFGH est un cube. I est le centre de la face ADHE et J est un point du segment [CG].
Il existe donc $a \in [0\ ;\ 1]$ tel que $\overrightarrow{\text{CJ}} = a\overrightarrow{\text{CG}}$.
On note (d) la droite passant par I et parallèle à (FJ).
On note K et L les points d'intersection de la droite (d) et des droites (AE) et (DH).
On se place dans le repère $\left(\text{A}\ ;\ \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}, \overrightarrow{\text{AE}}\right)$.

Partie A : Dans cette partie $a = \dfrac{2}{3}$



1. Dans le repère $\left(\text{A}\ ;\ \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}, \overrightarrow{\text{AE}}\right)$, F(1 ; 0 ; 1), I milieu de [AH] et de [DE], donc $\text{I}\left(0\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$ et $\text{J}\left(1\ ;\ 1\ ;\ \frac{2}{3}\right)$

2. On a par la question précédente que $\overrightarrow{\text{FJ}}\begin{pmatrix}0\\1\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$, comme $I \in d$, alors

$$M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (d) \iff \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 0\\ y &=& \frac{1}{2}+t \\ z &=& \frac{1}{2}-\frac{t}{3}\end{array}\right. \quad t \in \mathbf{R}.$$

3. **a.** Le point $K(x\ ;\ y\ ;\ z)$ est le point de (d) d'ordonnée nulle, soit $t + \frac{1}{2} = 0 \iff t = -\frac{1}{2}$.
Donc $z = \frac{1}{2} - \frac{-\frac{1}{2}}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.
Finalement, $\text{K}\left(0\ ;\ 0\ ;\ \dfrac{2}{3}\right)$.

   b. Tous les points de (DH) ont une ordonnée égale à 1.
Or un point de (d) a une ordonnée égale à $\frac{1}{2} + t = 1 \iff t = \frac{1}{2}$.
Enfin $L(x\ ;\ y\ ;\ z)$ admet $z = \frac{1}{2} - \frac{t}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ et donc $L\left(0\ ;\ 1\ ;\ \frac{1}{3}\right)$.

4. **a.** $\overrightarrow{\text{FJ}}\begin{pmatrix}0\\1\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{KL}}\begin{pmatrix}0-0\\1-0\\\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{\text{KL}}\begin{pmatrix}0\\1\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$: FJLK est un parallélogramme.

   b. FJLK est un losange si ses quatre cotés sont de même longueur, il suffit donc de montrer que seuls deux cotés consécutifs sont de même longueur (car FJLK est un parallélogramme).
Montrons que $FJ = LJ$.
En appliquant le théorème de Pythagore à FGJ rectangle en G, on obtient que $FJ^2 = 1 + \frac{1}{9}$. De même, pour LPJ rectangle en P, on obtient que $LJ^2 = 1 + \frac{1}{9}$.Comme FJ et LJ sont des longueurs, $FJ^2 = LJ^2 \Leftrightarrow FJ = LJ$.

c. FJLK est un carré si tous ses angles sont droits. Regardons donc si FJL est rectangle en J.
On sait que $FJ = LJ$ de la question précédente et on peut déterminer FL par Pythagore en HLF rectangle en H.

$$\begin{aligned} FL^2 &= HF^2 + HL^2 \\ &= \sqrt{2}^2 + \left(\frac{2}{3}\right)2 \\ &= 2 + \frac{4}{9} \end{aligned}$$

Enfin, FJL est rectangle en J si, et seulement si, $FL^2 = FJ^2 + LJ^2$. Or $FJ^2 + LJ^2 = (1 + \frac{1}{9}) + (1 + \frac{1}{9}) = 2 + \frac{2}{9} \neq FL^2$.
FJLK n'est pas un carré.

Partie B : Cas général

On admet que les coordonnées des points K et L sont : $K\left(0\ ;\ 0\ ;\ 1 - \dfrac{a}{2}\right)$ et $L\left(0\ ;\ 1\ ;\ \dfrac{a}{2}\right)$.
On rappelle que $a \in [0\ ;\ 1]$.

1. J a pour coordonnées $(1\ ;\ 1\ ;\ a)$.
2. On a $\overrightarrow{FJ}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a-1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{KL}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a-1 \end{pmatrix}$.
   Donc $\overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{KL} \iff$ FJLK est un parallélogramme.
3. FJLK est un losange si $a = \frac{2}{3}$ par la partie A.
   Vérifions s'il y en a d'autres. Regardons à nouveau si $FJ^2 = LJ^2$.
   Pythagore en FGJ nous donne $FJ^2 = 2 - 2a + a^2$ et en LPJ (pour $P\left(1\ ;\ 1\ ;\ \frac{a}{2}\right)$), nous avons $LJ^2 = 1 + \frac{a^2}{4}$.

$$\begin{aligned} FJ^2 = LJ^2 &\Leftrightarrow 2 - 2a + a^2 = 1 + \frac{a^2}{4} \\ &\Leftrightarrow 8 - 8a + 4a^2 = 4 + a^2 \\ &\Leftrightarrow 4 - 8a + 3a^2 = 0 \end{aligned}$$

   En considérant le discriminant du polynôme apparant, on trouve que $FJ = LJ \Leftrightarrow a = \frac{2}{3}$ ou $a = 2$ qui est exclu car $a \in [0;1]$.
4. On a vu dans la question précédente que seule la valeur $\dfrac{2}{3}$ de a donnait un losange FJLK et mais en A.4.c., FJLK n'est pas un carré.

EXERCICE 4 **6 POINTS**

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 &=& v_0 = 1 \\ u_{n+1} &=& u_n + v_n \\ v_{n+1} &=& 2u_n + v_n \end{array}\right.$$

Dans toute la suite de l'exercice, on **admet** que les suites (u_n) et (v_n) **sont strictement positives**.

1. **a.** $u_1 = u_0 + v_0 = 1 + 1 = 2$ et $v_1 = 2 \times u_0 + v_0 = 2 \times 1 + 1 = 3$.

   b. Pour tout n, $v_{n+1} = 2u_n + v_n$ donc $v_{n+1} - v_n = 2u_n$.
   On a admis que la suite (u_n) était strictement positive donc, pour tout n, $u_n > 0$; on en déduit que, pour tout n, $v_{n+1} - v_n > 0$ donc que la suite (v_n) est strictement croissante.
   La suite (v_n) est strictement croissante donc, pour tout n, $v_n \geqslant v_0$ donc $v_n \geqslant 1$.

   c. Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété : $u_n \geqslant n + 1$.
   On démontre cette propriété par récurrence.

   - **Initialisation**
     Pour $n = 0$, $u_n = u_0 = 1$ et $n + 1 = 1$ donc $u_n \geqslant n + 1$; $\mathscr{P}_0$ est vraie.
   - **Hérédité**
     On suppose que $\mathscr{P}_n$ est vraie (hypothèse de récurrence) et on va démontrer que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
     $\mathscr{P}_n$ vraie équivaut à $u_n \geqslant n + 1$.
     $u_{n+1} = u_n + v_n$; or $u_n \geqslant n+1$ et, d'après la question 1.b, $v_n \geqslant 1$. On en déduit que $u_{n+1} \geqslant n+2$ et donc que la propriété est vraie au rang $n + 1$.
   - **Conclusion**
     La propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie au rang 0, et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$; d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

   On a donc démontré que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n + 1$.

   d. Pour tout n, $u_n \geqslant n + 1$; or $\lim_{n\to+\infty} n + 1 = +\infty$, donc par comparaison, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2. On pose, pour tout entier naturel n : $r_n = \dfrac{v_n}{u_n}$. On admet que : $r_n^2 = 2 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}$.

   a. $(-1)^{n+1}$ vaut soit -1, soit 1 selon la parité de n ; donc $-1 \leqslant (-1)^{n+1} \leqslant 1$.
   On sait que $u_n > 0$ donc $u_n^2 > 0$.
   On divise par u_n^2 et on obtient : $-\dfrac{1}{u_n^2} \leqslant \dfrac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leqslant \dfrac{1}{u_n^2}$.

   b. On sait que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n^2 = +\infty$.
   On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{u_n^2} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n^2} = 0$.
   On sait de plus que, pour tout n : $-\dfrac{1}{u_n^2} \leqslant \dfrac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leqslant \dfrac{1}{u_n^2}$.
   Donc, d'après le théorème des gendarmes, on peut dire que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} = 0$.

   c. $r_n^2 = 2 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} = 0$, donc : $\lim_{n\to+\infty} r_n^2 = 2$.
   On peut en déduire que la suite (r_n) converge vers $\sqrt{2}$

   d. Pour tout entier naturel n,

$$r_{n+1} = \dfrac{v_{n+1}}{u_{n+1}} = \dfrac{2u_n + v_n}{u_n + v_n} = \dfrac{u_n\left(2 + \dfrac{v_n}{u_n}\right)}{u_n\left(1 + \dfrac{v_n}{u_n}\right)} = \dfrac{2 + \dfrac{v_n}{u_n}}{1 + \dfrac{v_n}{u_n}} = \dfrac{2 + r_n}{1 + r_n}.$$

e. On considère le programme suivant écrit en langage Python :

```
def seuil() :
    n = 0
    r = 1
    while abs(r-sqrt(2)) > 10**(-4) :
        r = (2+r)/(1+r)
        n = n+1
    return n
```

La valeur de n renvoyée par ce programme est 5.
Elle correspond à la plus petite valeur de n pour laquelle la distance entre r_n et $\sqrt{2}$ est inférieure ou égale à 10^{-4}.