9

Orthogonalité dans l'espace

Résumé

Il sera question de revoir la théorie du produit scalaire afin de parler d'orthogonalité dans l'espace et d'établir des équations cartésiennes de plan.

1 Produit scalaire géométrique

Définition 1 | Produit scalaire

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace. Appelons θ l'angle formé en prenant une origine commune pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
On note $\vec{u} \cdot \vec{v}$ le **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ comme étant le réel :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \left\| \vec{u} \right\| \times \left\| \vec{v} \right\| \times \cos(\theta).$$

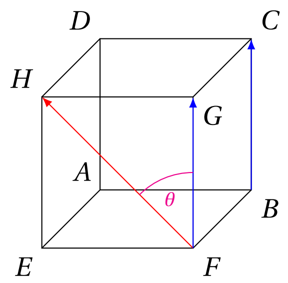
Remarques 2 ► Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est aussi souvent noté $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$.

► Dans le cas où un des vecteurs est nul, on peut aussi définir le produit scalaire :

$$\vec{u} \cdot \vec{0} = \vec{0} \cdot \vec{v} = 0.$$

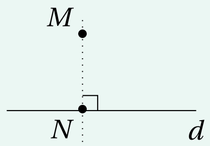
Exemple 3 Dans le cube $ABCDEFGH$ d'arête a suivant, si $\vec{u} = \overrightarrow{FH}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ alors $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\left\| \vec{u} \right\| = \sqrt{2}a$ et $\left\| \vec{v} \right\| = a$ donc :

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \left\| \vec{u} \right\| \times \left\| \vec{v} \right\| \times \cos(\theta) \\ &= \sqrt{2}a \times a \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= a^2. \end{aligned}$$



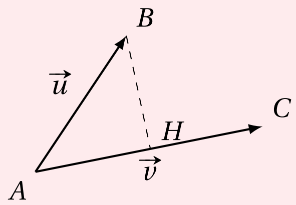
Définition 4 | Projeté orthogonal d'un point sur une droite

Soit M un point de l'espace et (d) une droite de l'espace.
Le **projeté orthogonal** de M sur (d) est l'unique point $N \in d$ tel que $(MN) \perp d$.



Propriété 5 | Projeté orthogonal

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace et A, B, C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.



En notant H (respectivement K) le projeté orthogonal de B sur (AC) (respectivement le projeté orthogonal de C sur (AB)), on a :

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AK}. \end{aligned}$$

Démonstration. Admise. □

Remarque 6 Il sera parfois plus commode d'utiliser des projetés orthogonaux pour calculer des produits scalaires.
Par exemple, toujours sur le cube $ABCDEFGH$ d'arête a, $\overrightarrow{HF}\cdot\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{HG}\cdot\overrightarrow{HG}$ car G est le projeté orthogonal de F sur (HG).
Ainsi,

$$\overrightarrow{HF}\cdot\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{HG}\cdot\overrightarrow{HG} = a\times a = a^2.$$

Propriétés 7 | Bilinéarité et symétrie du produit scalaire

Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs de l'espace, alors :

- $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$
- $\forall k\in\mathbf{R}, (k\vec{u})\cdot\vec{v} = k(\vec{u}\cdot\vec{v})$
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$

Remarque 8 On retrouve des propriétés analogues au produit entre deux réels : on peut "développer", "commuter" et "factoriser".

Théorème 9

Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, on a : $\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.

Démonstration. Direct par définition du produit scalaire. □

Définition 10 | Vecteurs orthogonaux

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont dits **orthogonaux** si l'angle θ associé admet pour mesure principale $\frac{\pi}{2}$.
$\vec{0}$ est orthogonal à tout autre vecteur de l'espace.

Théorème 11 | Caractérisation de l'orthogonalité de vecteurs

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

Démonstration. Supposons $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux. Ainsi, $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.
Réciproquement, supposons que $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

Nous avons nécessairement que $\|\vec{u}\| = 0$ ou $\|\vec{v}\| = 0$ ou $\cos(\theta) = 0$. Dans les deux premiers cas, $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul donc les vecteurs sont orthogonaux. Dans le dernier cas, nous retrouvons que $\theta = \frac{\pi}{2}$. □

Corollaire 12 | Orthogonalité de deux droites

Soient (d_1) et (d_2) deux droites de vecteurs directeurs associés $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
(d_1) et (d_2) sont **orthogonales** si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

2 Produit scalaire analytique

Dans toute la section, nous nous plaçons dans un **repère orthonormé** $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.

Théorème 13

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace.

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

Démonstration. Dans $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, on a :

- $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = \|\vec{k}\| = 1$
- $\vec{\imath}\cdot\vec{\jmath} = \vec{\imath}\cdot\vec{k} = \vec{\jmath}\cdot\vec{k} = 0$.
  Ainsi,

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= \left(x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}\right)\cdot\left(x'\vec{\imath}+y'\vec{\jmath}+z'\vec{k}\right)\\ &= xx'\vec{\imath}\cdot\vec{\imath}+xy'\vec{\imath}\cdot\vec{\jmath}+xz'\vec{\imath}\cdot\vec{k}\\ &\quad+yx'\vec{\jmath}\cdot\vec{\imath}+yy'\vec{\jmath}\cdot\vec{\jmath}+yz'\vec{\jmath}\cdot\vec{k}\\ &\quad+zx'\vec{k}\cdot\vec{\imath}+zy'\vec{k}\cdot\vec{\jmath}+zz'\vec{k}\cdot\vec{k}.\end{aligned}$$

Par propriétés de la base :

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= xx'\times1+xy'\times0+xz'\times0\\ &\quad+yx'\times0+yy'\times1+yz'\times0\\ &\quad+zx'\times0+zy'\times0+zz'\times1\\ &= xx'+yy'+zz'.\end{aligned}$$

□

Remarque 14 Il est assez remarquable que le produit scalaire ne dépend pas de la base orthonormée choisie ! Un choix avisé de repère permet de calculer plus facilement des produits scalaires.

Corollaire 15 | Conséquences de l'expression analytique

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ un vecteur de l'espace, $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et $B(x_B ; y_B ; z_B)$ deux points.

- $\vec{u}\cdot\vec{u} = \left\|\vec{u}\right\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$
- $AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

Démonstration. ▶ Direct par le théorème précédent.

▶ Remarquons que $\overrightarrow{AB}$ admet pour coordonnées $\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\\z_B - z_A\end{pmatrix}$ et appliquons le point précédent.

□

Propriétés 16 | Identités remarquables

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

- $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2 = \left\|\vec{u}\right\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \left\|\vec{v}\right\|^2$
- $\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2 = \left\|\vec{u}\right\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \left\|\vec{v}\right\|^2$

Démonstration. Développer par bilinéarité les produits scalaires $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})$ $(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})$. □

Théorème 17 | Formules de polarisation

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

- $$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2 - \left\|\vec{u}\right\|^2 - \left\|\vec{v}\right\|^2\right)$$
- $$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{4}\left(\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2 - \left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2\right)$$

Démonstration. Par identités remarquables. □

Remarque 18 Nous pouvons maintenant déterminer des produits scalaires, seulement à partir de longueurs : sans la nécessité d'un angle !

3 Orthogonalité et plans

Définition 19

Soient $\mathscr{P}$ un plan de l'espace et (d) une droite de l'espace.
$\mathscr{P}$ et (d) sont **orthogonaux** si (d) est orthogonale à toute droite de $\mathscr{P}$.

Remarque 20 Dans ce cas, on peut dire indifféremment que (d) est perpendiculaire ou orthogonale à $\mathscr{P}$.

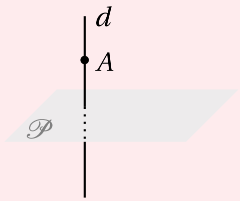
Propriété 21

Soient $\vec{u}$ vecteur directeur de (d) et $\vec{a}$, $\vec{b}$ deux vecteurs non colinéaires de la direction de $\mathscr{P}$.
$\mathscr{P}$ et (d) sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

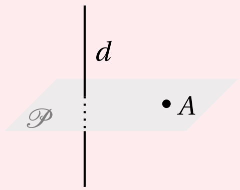
Démonstration. Deux vecteurs non colinéaires forment une base de la direction de $\mathscr{P}$. □

Propriétés 22

- Il existe une unique droite (d) passant un point A et perpendiculaire à un plan $\mathscr{P}$ donné.

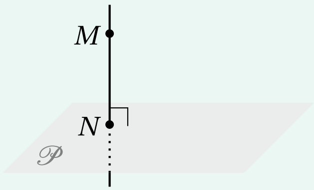


- Il existe un unique plan $\mathscr{P}$ passant un point A et orthogonal à une droite (d) donnée.



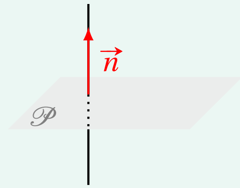
Définition 23 | Projeté orthogonal d'un point sur un plan

Soit M un point de l'espace et $\mathscr{P}$ une droite de l'espace.
Le **projeté orthogonal** de M sur $\mathscr{P}$ est l'intersection N de $\mathscr{P}$ et sa droite perpendiculaire passant par M.



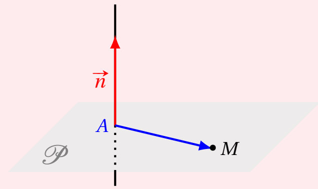
Définition 24 | Vecteur normal à un plan

On appelle vecteur **normal** à un plan tout vecteur non nul $\vec{n}$ directeur d'une droite orthogonale à ce plan.



Propriété 25 | Caractérisation vectorielle d'un plan

Soient $\mathscr{P}$ un plan de vecteur normal $\vec{n}$ et A un point de $\mathscr{P}$.
Un point M appartient à $\mathscr{P}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$.



Corollaire 26

Le **projeté orthogonal** de M sur $\mathscr{P}$ est le point de $\mathscr{P}$ le plus proche de M.

Démonstration. Appelons N le dit projeté. Si $M\in\mathscr{P}$, alors $M=N$.
Sinon, $M\notin\mathscr{P}$ et $M\neq N$.
Par définition de N, $\overrightarrow{NM}$ est ainsi un vecteur normal de $\mathscr{P}$.
Supposons par l'absurde qu'il existe point $N'\in\mathscr{P}$ plus proche de M que N ($NM>N'M$).
Nous avons par caractérisation vectorielle de $\mathscr{P}$ que $\overrightarrow{NN'}\cdot\overrightarrow{NM}=0$.
Considérons $NN'^2=\left\|\overrightarrow{NN'}\right\|^2=\overrightarrow{NN'}\cdot\overrightarrow{NN'}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{NN'}\cdot\overrightarrow{NN'}&=\overrightarrow{NN'}\cdot\left(\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{MN'}\right)\text{ par Chasles}\\&=\overrightarrow{NN'}\cdot\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{NN'}\cdot\overrightarrow{MN'}\\&=\overrightarrow{NN'}\cdot\overrightarrow{MN'}\\&=0\text{ car }\overrightarrow{NN'}\text{ et }\overrightarrow{MN'}\text{ sont orthogonaux}\end{aligned}$$

Finalement, $NN'=0$ donc $N=N'$, absurde. □

4 Équations cartésiennes de plans et intersections

On se place dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.

Propriété 27

Un plan $\mathscr{P}$ admet une infinité d'**équations cartésiennes** de la forme :

$$ax+by+cz+d=0 \qquad \text{où } a, b \text{ et } c \text{ sont des réels non tous nuls.}$$

Réciproquement, toute équation de cette forme est l'équation d'un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

Démonstration.

- ▷ Soit $\mathscr{P}$ de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\neq\vec{0}$. Considérons $M_0(x_0;y_0;z_0)$ un point de $\mathscr{P}$.

$$\begin{aligned}M(x;y;z)\in\mathscr{P} &\Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{n}=0\\ &\Leftrightarrow (x-x_0)a+(y-y_0)b+(z-z_0)c=0\\ &\Leftrightarrow ax+by+cz+(-ax_0-by_0-cz_0)=0\end{aligned}$$

On obtient une infinité d'équations en multipliant celle obtenue par tous les réels non nuls.

- ▷ Soit $ax+by+cz+d=0$ où a,b et c sont des réels non tous nuls. Supposons sans perdre de généralités que $a\neq 0$.

Posons $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\neq\vec{0}$ et $M_0\left(-\frac{d}{a};0;0\right)$. En réutilisant le point précédent, le plan de vecteur normal $\vec{n}$ passant par M_0 admet pour équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$. □

Remarque 28 Nous généralisons les équations cartésiennes desdroites dans le plan aux équations cartésiennes de plans dans l'espace mais nous pourrions généraliser encore aux équations cartésiennes d'hyperplans en toutes dimensions.

Théorème 29 | Intersection droite/plan

Soient $\mathscr{P}$ un plan de vecteur normal $\vec{n}$ et (Δ) une droite de vecteur directeur $\vec{u}$.

- ▶ Si $\vec{n}$ et $\vec{u}$ ne sont pas orthogonaux, alors $\mathscr{P}$ et (Δ) sont sécants en un seul point.
- ▶ Si $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux :
  - ▷ (Δ) est inclus dans $\mathscr{P}$ s'ils ont un point commun ;
  - ▷ (Δ) et $\mathscr{P}$ sont strictement parallèles s'ils n'ont pas de point commun.

Démonstration. Posons $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ et supposons que (Δ) passe par $A(x_A;y_A;z_A)$.

On a : $\mathscr{P}: ax+by+cz+d=0$ et $\Delta:\begin{cases}x=\alpha t+x_A\\ y=\beta t+y_A\\ z=\gamma t+z_A\end{cases}, t\in\mathbf{R}$

Ainsi, $\mathscr{P}\cap\Delta:\begin{cases}ax+by+cz+d=0\\ x=\alpha t+x_A\\ y=\beta t+y_A\\ z=\gamma t+z_A\end{cases}, t\in\mathbf{R}.$

Donc, $\mathscr{P}\cap\Delta:\begin{cases}a(\alpha t+x_A)+b(\beta t+y_A)+c(\gamma t+z_A)+d=0\\ x=\alpha t+x_A\\ y=\beta t+y_A\\ z=\gamma t+z_A\end{cases}, t\in\mathbf{R}.$

- ▶ Si $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux alors $\vec{n}\cdot\vec{u}=0\Leftrightarrow a\alpha+b\beta+c\gamma=0$ et ainsi :

$$\mathscr{P}\cap\Delta:\begin{cases}ax_A+by_A+cz_A+d=0\\ x=\alpha t+x_A\\ y=\beta t+y_A\\ z=\gamma t+z_A\end{cases}, t\in\mathbf{R}.$$

  - ▷ S'il y a un point commun (sans perdre de généralités, A), alors A vérifie l'équation $ax+by+cz+d=0$ et donc : $\mathscr{P}\cap\Delta=\Delta:\begin{cases}x=\alpha t+x_A\\ y=\beta t+y_A\\ z=\gamma t+z_A\end{cases}, t\in\mathbf{R}.$
  - ▷ Sinon, A ne vérifie pas l'équation $ax+by+cz+d=0$ et donc $\mathscr{P}\cap\Delta=\varnothing$ ce qui implique (Δ) et $\mathscr{P}$ sont strictement parallèles.

- ▶ Si $\vec{n}$ et $\vec{u}$ ne sont pas orthogonaux, alors :

$$a(\alpha t+x_A)+b(\beta t+y_A)+c(\gamma t+z_A)+d=0\Leftrightarrow t=\frac{-d-(ax_A+by_A+cz_A)}{a\alpha+b\beta+c\gamma}.$$

$\mathscr{P} \cap \Delta$ est réduit à un seul point associé à ce t.

$\square$

Théorème 30 | Intersection plan/plan

Soient $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ deux plans de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n'}$.

- Si $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ ne sont pas colinéaires, alors $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants selon une droite.
- Si $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont colinéaires, alors $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles.

Démonstration. On pose $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et $\vec{n'}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$ et donc, on dispose d'équations cartésiennes :
$\mathscr{P} : ax+by+cz+d=0$ et $\mathscr{P}' : a'x+b'y+c'z+d'=0$.
L'intersection $\mathscr{P} \cap \mathscr{P}'$ admet donc le système $\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$.

- Si $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont colinéaires, considérons deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathscr{P}$ (formant une base), ils sont orthogonaux à $\vec{n}$. Montrons qu'ils sont aussi orthogonaux à $\vec{n'}$; ainsi, ils formeront aussi une base de $\mathscr{P}'$ et on aura $\mathscr{P} // \mathscr{P}'$.
  Il existe $\lambda \in \mathbf{R}^*$ tel que $\vec{n'} = \lambda\vec{n}$ donc $\vec{u}\cdot\vec{n'} = \vec{u}\cdot(\lambda\vec{n}) = \lambda\vec{u}\cdot\vec{n} = \lambda\times 0 = 0$. De même, $\vec{v}\cdot\vec{n'} = 0$.
- Si $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ ne sont pas colinéaires, au moins un des quatres paramètres b, b', c ou c' est non nul (supposons $b\neq 0$) et en posant $x=t$, on a :

$$\mathscr{P} \cap \mathscr{P}' : \begin{cases} x = t \\ at+by+cz+d=0\ b. \\ a't+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$$

  En travaillant sur le système, on peut mettre en évidence une représentation paramétrique de droite.

$\square$