8

CONVEXITÉ

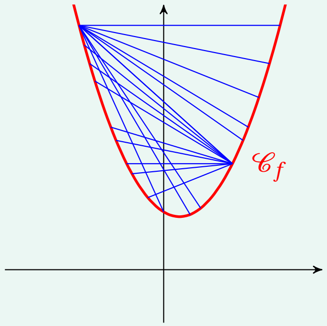
Résumé

Dans ce court chapitre, nous abordons la notion fine de convexité en étudiant son aspect graphique puis analytique.

1 Fonctions convexes et concaves

Définition 1 | Fonction convexe

Soientt f une fonction définie sur un intervalle I et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.
f est dite **convexe** sur I si :
Pour tout $A, B \in \mathscr{C}_f$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est "en dessous" du segment $[AB]$.



Propriété 2 | Définition analytique

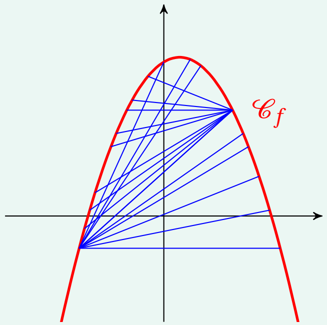
On peut aussi définir que f est convexe sur I si, et seulement si,
$\forall a, b \in I, \forall t \in [0;1]$,

$$f\big(ta + (1-t)b\big) \leqslant tf(a) + (1-t)f(b).$$

Démonstration. Soient A et B points distincts de $\mathscr{C}_f$ distincts.
Tous les points de $[AB]$ ont pour uniques coordonnées $\big(ta + (1-t)b; tf(a) + (1-t)f(b)\big)$ avec $t \in [0;1]$. □

Définition 3 | Fonction concave

Soientt f une fonction définie sur un intervalle I et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.
f est dite **concave** sur I si :
Pour tout $A, B \in \mathscr{C}_f$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est "au dessus" du segment $[AB]$.



Propriété 4 | Définition analytique

On peut aussi définir que f est concave sur I si, et seulement si,
$\forall a, b \in I, \forall t \in [0;1]$,

$$f\big(ta + (1-t)b\big) \geqslant tf(a) + (1-t)f(b).$$

2 Propriétés

Propriétés 5

- La somme de deux fonctions convexes sur I (resp. concaves sur I) est convexe sur I (resp. concave sur I).
- Le produit d'une fonction convexe sur I (resp. concave sur I) par un nombre réel **strictement positif** est convexe sur I (resp. concave sur I).
- Le produit d'une fonction convexe sur I (resp. concave sur I) par un nombre réel **strictement négatif** est concave sur I (resp. convexe sur I).

Démonstration. Directe en utilisant les définitions analytiques. □

Théorème 6 | Utilisation de la dérivée seconde

Soit f une fonction **dérivable deux fois** sur I.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

f est convexe sur I ;
$\Leftrightarrow$ f' est croissante sur I ;
$\Leftrightarrow$ $f'' \geqslant 0$ sur I ;
$\Leftrightarrow$ $\mathscr{C}_f$ est au dessus de ses tangentes.

Démonstration. Nous allons faire une preuve circulaire.

- $\mathscr{C}_f$ est au dessus de ses tangentes $\Rightarrow$ f est convexe sur I ; par définition.
  En effet, si une tangente traverse $\mathscr{C}_f$ alors elle crée un segment "au dessus" de $\mathscr{C}_f$.
- On admet que f est convexe sur $I \Rightarrow f'$ est croissante sur I.
- f' est croissante sur $I \Rightarrow f'' \geqslant 0$ sur I car f est deux fois dérivable sur I.
- Montrons que $f'' \geqslant 0$ sur $I \Rightarrow \mathscr{C}_f$ est au dessus de ses tangentes.

  Soit f deux fois dérivable telle que $f'' \geqslant 0$ sur I. Prenons $a \in I$. Nous souhaitons que $\mathscr{C}_f$ soit au dessus de $T_a(f)$.

$$T_a(f) : y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Pour étudier les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $T_a(f)$, on étudie :

$$g : x \mapsto f(x) - \left(f'(a)(x-a) + f(a)\right).$$

g est dérivable sur I et $\forall x \in I, g'(x) = f'(x) - f'(a)$. f'' étant croissante sur I, on a $g'(x) \geqslant 0$ si $x \leqslant a$ et $g'(x) \leqslant 0$ si $x \geqslant a$: par continuité de g' (car dérivable) et le TVI, $g'(a) = 0$.
$g(a)$ est le minimum de g sur I et vaut $f(a) - \left(f'(a)(a-a) + f(a)\right) = 0$.
Finalement, $g \geqslant 0$ sur I donc $\mathscr{C}_f$ est au dessus de $T_a(f)$.

□

Exemples 7

- La fonction **ex**ponentielle est conv**exe** car $\exp'' = \exp > 0$.
- Toute parabole ouverte est convexe. En effet, ce sont les représentations graphiques d'expressions $f : x \mapsto a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $a > 0$.
  f est deux fois dérivable : $\forall x \in \mathbf{R}, f'(x) = 2a(x-\alpha)$ donc $f''(x) = 2a > 0$.

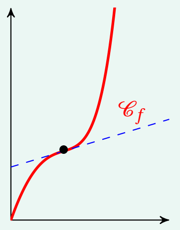
Exercice 8

Soit f définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

1. Démontrer que f est convexe sur $\mathbf{R}_+^*$.
2. Déterminer une équation de la tangente $T_1(f)$.
3. En déduire que $\forall x > 0, x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$.

Définition 9 | Point d'inflexion

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
$A \in \mathscr{C}_f$ est un point d'inflexion si en ce point $\mathscr{C}_f$ traverse la tangente.



Théorème 10

Soient f définie sur I et $a \in I$.

- Le point $\left(a; f(a)\right)$ est un point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$ si, et seulement si, la convexité de f change en a.
- Si de plus, f est deux fois dérivable sur I, alors le point $\left(a; f(a)\right)$ est un point d'inflexion si, et seulement si, f'' s'annule et change de signe en a.

Démonstration. Admis. □

Exercice 11

Déterminer les éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de f définie sur $\mathbf{R}$ par : $f(x) = x^3 - 21x^2 + 19$.