6

Géométrie dans l'espace

Résumé

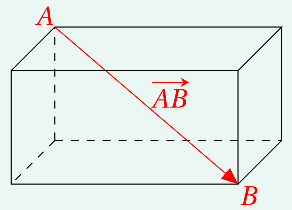
Dans ce chapitre, nous étendons la théorie connue des vecteurs : du plan à l'espace, de la dimension 2 à la dimension 3. Nous aborderons coordonnées de vecteurs, colinéarité, propriétés d'alignement et plus encore...

1 Vecteurs de l'espace

1.1 Généralités

Définition 1

Soient A et B deux points de l'espace.
Le **vecteur** $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par sa **direction** (la droite (AB)), sa **norme** $\|AB\|$ (la longueur AB) et son **sens** (de A vers B).

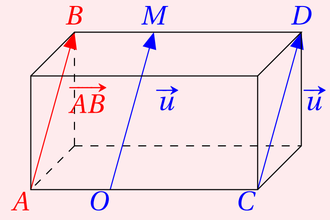


Remarque 2 Si $A = B$ alors $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur nul $\overrightarrow{0}$.

Propriétés 3

Soient A, B, C et D quatre points de l'espace.

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si, et seulement si, $ABDC$ est un parallélogramme.
- D est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
- Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ et tout point O, il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OM}$.



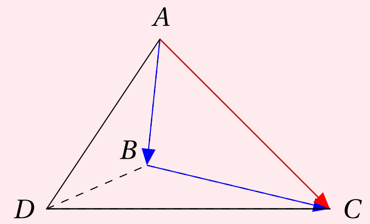
1.2 Opérations

Définitions 4 | Somme et opposé

- La **somme** de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le vecteur associé à la translation qui résulte de l'enchaînement des translations de vecteur $\overrightarrow{u}$ puis de vecteur $\overrightarrow{v}$. On note ce vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.
- Soit $\overrightarrow{AB}$ un vecteur. Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ est appelé **opposé** du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et on le note aussi $-\overrightarrow{AB}$.

Théorème 5 | Relation de Chasles

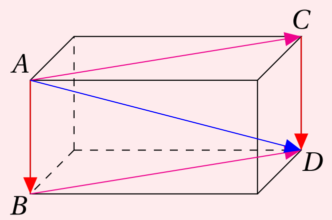
Pour tout points A, B et C, on a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.



Démonstration. Découle de la définition de la somme de deux vecteurs. □

Théorème 6 | Règle du parallélogramme

$ABDC$ est un parallélogramme si, et seulement si, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$.



Démonstration. On sait que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ si, et seulement si, $ABDC$ est un parallélogramme.
Il nous suffit donc de montrer que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$.

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}\\ \Leftrightarrow\ &\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}\\ \Leftrightarrow\ &\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD} \qquad \text{par Chasles}\end{aligned}$$

□

Propriété 7

Soit $\overrightarrow{AB}$ un vecteur. Alors $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}=\vec{0}$.

Démonstration. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}$ Ainsi, par la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$. □

Définition 8 | Produit par un scalaire

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et $k\in\mathbf{R}^*$. Le vecteur $k\vec{u}$ est le vecteur qui a :

- la même direction que $\vec{u}$;
- le même sens que $\vec{u}$ si $k>0$, le sens contraire si $k<0$;
- pour norme $|k|\,\|\vec{u}\|$.

Propriétés 9 | Distributivité et produit nul

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs et k, k' des réels.

- $k(\vec{u}+\vec{v})=k\vec{u}+k\vec{v}$
- $(k+k')\vec{u}=k\vec{u}+k'\vec{u}$
- $k\vec{u}=\vec{0}$ si, et seulement si, $k=0$ ou $\vec{u}=\vec{0}$

Démonstration. Triviale à partir des définitions de somme, produit par un scalaire et le théorème de Chasles. □

Définition 10 | Colinéarité

Deux vecteurs sont dits **colinéaires** s'ils possèdent la même direction.
Autrement dit, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe $k\in\mathbf{R}$ tel que $\vec{v}=k\vec{u}$.

Théorème 11 | Alignement

Soient A, B, C et D des points **distincts** de l'espace.

- A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
- $(AC)//(CD) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

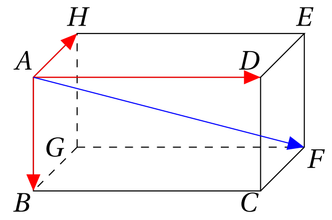
1.3 Combinaisons linéaires de vecteurs

Définition 12 | Combinaison linéaire

Soient $\vec{x}$ et $\vec{y}$ deux vecteurs.
Tout vecteur s'écrivant $\lambda\vec{x}+\mu\vec{y}$ (où λ et μ sont deux réels) est une **combinaison linéaire** de $\vec{x}$ et $\vec{y}$.

Remarque 13 On peut généraliser les combinaisons linéaires à 3 vecteurs, 4 vecteurs, etc...

Exemple 14 Dans ce parallépipède rectangle $ABCDEFGH$, le vecteur $\overrightarrow{AF}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AH}$ car $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AH}$.



Définition 15 | Indépendance

Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **linéairement indépendants** si aucun des vecteurs ne peut s'écrire comme combinaison linéaire des deux autres.

Propriété 16

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement indépendants si, et seulement si,
$a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}=\vec{0}$ implique $a=b=c=0$ pour tout $a,b,c\in\mathbf{R}$.

Démonstration. Il est plus simple de montrer la propriété équivalente suivante :

L'un des trois vecteurs est une combinaison linéaire des deux autres si, et seulement si, il existe $a,b,c\in\mathbf{R}$ tels que $a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}=\vec{0}$ mais a ou b ou c est non nul.

Sans perdre de généralités, supposons que $\vec{w}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Ainsi, il existe λ et μ deux réels tels que $\vec{w}=\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}$ donc $\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}-\vec{w}=\vec{0}$.
$a=\lambda$, $b=\mu$ et $c=-1$ non nul conviennent.

Réciproquement, supposons qu'il existe $a,b,c\in\mathbf{R}$ tels que $a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}=\vec{0}$ mais a ou b ou c est non nul, (disons a).
Ainsi, $a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{u}=-\frac{b}{a}\vec{v}-\frac{c}{a}\vec{w}$ car $a\neq0$ donc on a une combinaison linéaire. □

2 Droites et plan de l'espace

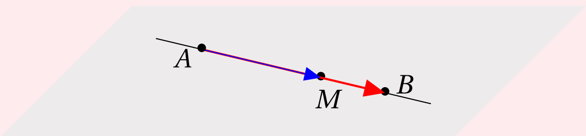
2.1 Droites

Définition 17 | Vecteur directeur

Soit (d) une droite de l'espace.
Tout vecteur non nul ayant comme direction la droite (d) est un **vecteur directeur** de (d).

Propriété 18 | Caractérisation d'une droite

Soient A et B deux points distincts.
La droite (AB) est formée de tous les point M vérifiant que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, c'est-à-dire, où il existe $k\in\mathbf{R}$ tel que $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$.



2.2 Plans

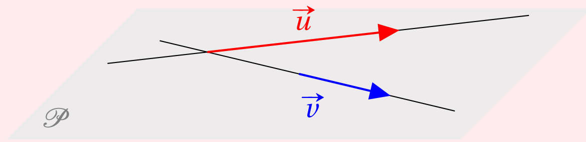
Définition 19 | Direction d'un plan

On appelle **direction** d'un plan $\mathscr{P}$ l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, où A et B sont deux points distincts de $\mathscr{P}$.

Propriétés 20 | Caractérisation d'un plan

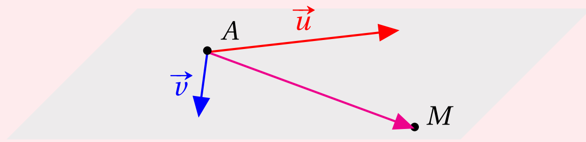
- Deux vecteurs **non colinéaires** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de la direction d'un plan $\mathscr{P}$ **engendrent** cette direction, c'est-à-dire que tout vecteur de la direction de $\mathscr{P}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

  On dit que $(\vec{u},\vec{v})$ est une **base** de $\mathscr{P}$.



- Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires et A un point de l'espace.

  L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}=x\vec{u}+y\vec{v}$ avec $x,y\in\mathbf{R}$, est un plan passant par A.



Démonstration. ▶ Admis.

- Considérons $\mathscr{P}$ le plan défini par A, B l'image de A par la translation $\vec{u}$ et C l'image de A par la translation de vecteur $\vec{v}$.

  Par construction, $\mathscr{P}$ passe par A et $(\vec{u},\vec{v})$ est une base de $\mathscr{P}$.

  Si $M\in\mathscr{P}$ alors $\overrightarrow{AM}$ appartient à la direction de $\mathscr{P}$ et donc est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

  Réciproquement, soit M un point de l'espace de sorte que $\overrightarrow{AM}=x\vec{u}+y\vec{v}$ avec $x,y\in\mathbf{R}$.

Notons D et E les points tels que $\overrightarrow{AD} = x\vec{u}$ et $\overrightarrow{AE} = y\vec{v}$. Ainsi, on a $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AM}$ donc $ADME$ est un parallélogramme, par la règle du parallélogramme, et tous ses sommets appartiennent au même plan : $\mathscr{P}$.

□

Définition 21 | Vecteurs coplanaires

Des vecteurs sont **coplanaires** si, partant d'un même point A, toutes leurs images de translation appartiennent au même plan.

Propriétés 22 | Coplanarité

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.

- $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si, et seulement si, il existe a, b, c **non tous nuls** tels que $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$.
- $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires si, et seulement si, $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$ implique $a = b = c = 0$.

3 Bases et repères dans l'espace

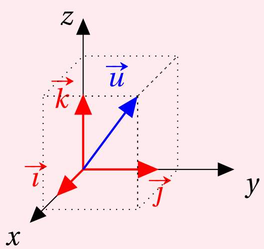
Définition 23 | Base

On appelle **base de l'espace** tout triplet $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ de vecteurs non coplanaires.

Théorème 24 | Décomposition dans une base

Soit $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ une base de l'espace.

Pour tout vecteur $\vec{u}$, il **existe** une **unique** décomposition $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ où $x, y, z \in \mathbf{R}$ sont appelés **coordonnées** de $\vec{u}$ dans la base.



Démonstration. **Existence** Admis.

Unicité Soient $x, y, z \in \mathbf{R}$ et $x', y', z' \in \mathbf{R}$ tels que $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} + z'\vec{k}$.

On a, par soustraction, $(x - x')\vec{\imath} + (y - y')\vec{\jmath} + (z - z')\vec{k} = \vec{0}$. Cependant, par non coplanarité de la base, nécessairement, $x - x' = y - y' = z - z' = 0$.

Finalement, $x = x'$, $y = y'$ et $z = z'$.

□

Remarque 25 On notera les coordonnées de $\vec{u}$ avec l'écriture suivante $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Corollaire 26 | Opérations et coordonnées

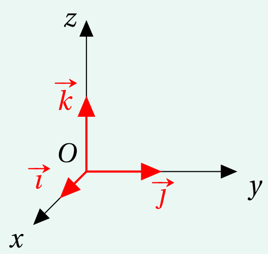
Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace.

- Les coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$ sont $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$.
- Les coordonnées de $k\vec{u}$ sont $\begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix}$ pour tout $k \in \mathbf{R}$.

Remarque 27 On retrouve des propriétés analogues à celles utilisées pour les vecteurs du plan.

Définition 28 | Repère

Un **repère de l'espace** est un quadruplet $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ où O est un point et $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ une base de l'espace.
O est appelé l'**origine** du repère.



Remarque 29 Soit M un point de l'espace et $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ un repère.
Les coordonnées de M dans ce repère sont les coordonnées de $\overrightarrow{OM}$ dans la base $\left(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.

On notera $M(x;y;z)$ si $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

Propriétés 30

Soient $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$ dans un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.

- $$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix}$$
- Le milieu de $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2};\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$.

Démonstration.
- Si on change de repère en prenant $\left(A;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ alors : $A(0;0;0)$ et $B(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$.

  Par définition, les coordonnées de B dans le repère $\left(A;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ sont les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ dans la base $\left(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ à savoir $\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix}$.
- Trivial en considérant que $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

□

Exercice 31

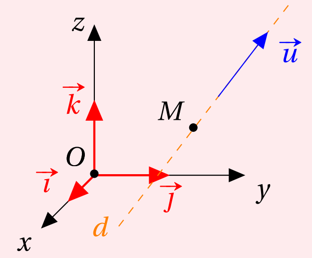
1. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sachant $A(4;2;-1)$ et $B(8;-9;1)$.
2. Calculer les coordonnées de I le milieu de $[AB]$ sachant que $A(0,2,7)$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\5\\1\end{pmatrix}$.

4 Représentation paramétrique d'une droite

Propriété 32 | Représentation paramétrique

Soit (d) une droite passant par $A(x_A;y_A;z_A)$ de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ dans un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.

$$M(x;y;z)\in d \Leftrightarrow \text{il existe } t\in\mathbf{R} \text{ tel que : } \begin{cases}x=at+x_A\\y=bt+y_A\\z=ct+z_A\end{cases}.$$



Démonstration. On utilise la caractérisation de (d) : $M\in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires. □

Remarque 33 On reconnait des expressions affines pour chacune des coordonnées de M. Les coordonnées de A jouent le rôle d'ordonnées à l'origine et celles de $\vec{u}$ de coefficients directeurs.

Exercice 34

Déterminer une représentation paramétrique de (d) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ donnés.

1. $A(-3;6;2)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-3\\4\end{pmatrix}$
2. $A(0;-7;8)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\\-2\end{pmatrix}$