5

LIMITES DE FONCTIONS

Résumé

L'étude des limites de suites nous a ouvert la voie à l'étude de nouvelles limites : celles des fonctions.
Nous pourrons aborder le comportement asymptotique de courbes et fonctions avancées tout en donnant des résultats de comparaisons très puissants.

Dans toute la suite, f, g, h, u et v désigneront des fonctions et ℓ, x_0, a , α des nombres réels.

1 Limites d'une fonction

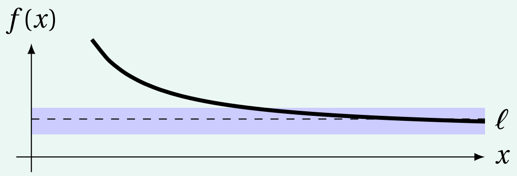
1.1 Comportement en $\pm\infty$

Définitions 1

Soit f définie sur $[\alpha\,;+\infty[$.

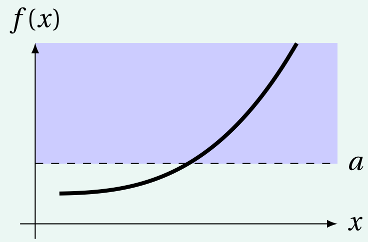
- La **limite de** f **en** $+\infty$ **est égale à** ℓ si, et seulement si, tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisamment grand.

  On note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.



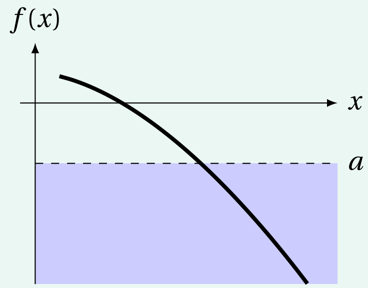
- La **limite de** f **en** $+\infty$ **est égale à** $+\infty$ si, et seulement si, tout intervalle $]a\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisamment grand.

  On note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.



- La **limite de** f **en** $+\infty$ **est égale à** $-\infty$ si, et seulement si, tout intervalle $]-\infty\,;a[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisamment grand.

  On note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.



Exemple 2 Une fonction constante égale à ℓ tend vers ℓ en $+\infty$ et tend vers ℓ en $-\infty$.

Remarques 3

- On peut encore utiliser les deux notations :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \qquad \text{ou} \qquad f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

- On définit de manière similaire la limite de f en $-\infty$.
- On dit que la droite d'équation $y = \ell$ est une **asymptote horizontale à la courbe** de f en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) si, et seulement si, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ (respectivement $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$).

1.2 Comportement en un réel x_0

Définitions 4

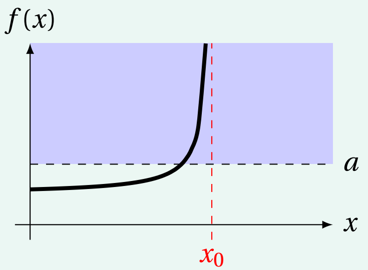
Soit f définie sur l'intervalle $]x_0\,;x_0+r[$ ou sur $]x_0-r\,;x_0[$ avec $r>0$.

- La **limite de f en x_0 est égale à ℓ** si, et seulement si, tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisamment proche de x_0.

  On note $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$.

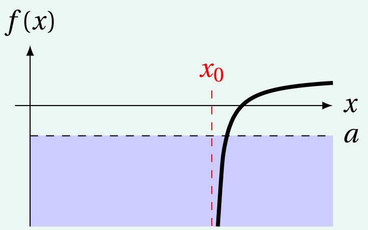
- La **limite de f en x_0 est égale à $+\infty$** si, et seulement si, tout intervalle $]a\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisamment proche de x_0.

  On note $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$.



- La **limite de f en x_0 est égale à $-\infty$** si, et seulement si, tout intervalle $]-\infty\,;b[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisamment proche de x_0.

  On note $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$.



Remarques 5

- On parlera de **limite à gauche** quand on approche de x_0 en faisant croître x. On pourra utiliser les notations suivantes.

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

- On parlera de **limite à droite** quand on approche de x_0 en faisant décroître x. On pourra utiliser les notations suivantes.

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

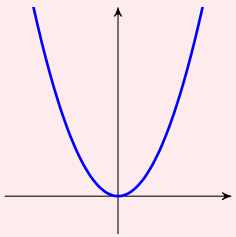
- On dit que la droite d'équation $x=x_0$ est une **asymptote verticale à la courbe** de f en x_0 si, et seulement si, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ ou $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$.

2 Opérations sur les limites

2.1 Fonctions usuelles

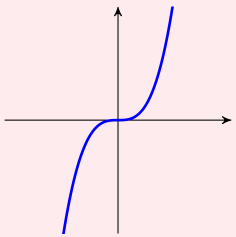
Propriétés 6 | Limites usuelles

- Si $f(x)=x^n$ avec $n\in\mathbb{N}^*$ **pair**, alors :



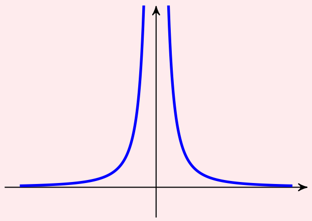
  ▷ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n=+\infty$
  ▷ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n=+\infty$.

- Si $f(x)=x^n$ avec $n\in\mathbb{N}$ **impair**, alors :



  ▷ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n=-\infty$
  ▷ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n=+\infty$.

- Si $f(x)=\dfrac{1}{x^n}$ avec $n\in\mathbf{N}^*$ **pair**, alors :



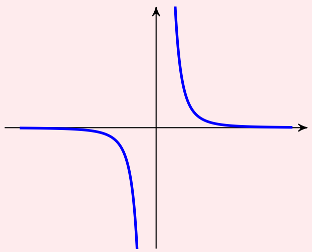
▷ $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=0$

▷ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=0$

▷ $\displaystyle\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x^n}=+\infty$

▷ $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^n}=+\infty$.

- Si $f(x)=\dfrac{1}{x^n}$ avec $n\in\mathbf{N}$ **impair**, alors :



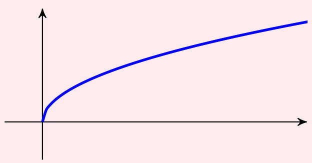
▷ $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=0$

▷ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=0$

▷ $\displaystyle\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x^n}=-\infty$

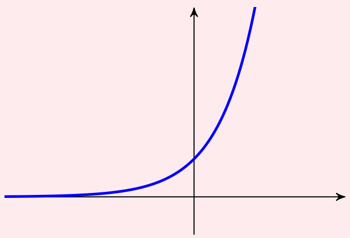
▷ $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^n}=+\infty$.

- Si $f(x)=\sqrt{x}$, alors :



▷ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$.

- Si $f(x)=\mathrm{e}^x$, alors :



▷ $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$

▷ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty$.

Démonstration. Donnons les preuves de quelques limites. Elles reposent toutes sur le même principe : se ramener aux limites de suites connues.

- Soit f définie sur $\mathbf{R}_+$ par $f(x)=\sqrt{x}$. On peut noter aussi que $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$.
  Soit $a\in\mathbf{R}$ et considérons l'intervalle $I=]a;+\infty[$.
  Montrons qu'il existe x_0 tel que $\forall x\geqslant x_0$, $\sqrt{x}\in I$.

  On sait que la suite de terme général $n^{\frac{1}{2}}$ est divergente de limite $+\infty$ car $0<\frac{1}{2}$.
  Ainsi il existe un certain rang n_0 tel que $\forall n\geqslant n_0$, $\sqrt{n}\in I$.
  Par croissance de la racine carrée, $x\geqslant n_0\Leftrightarrow\sqrt{n}\geqslant\sqrt{n_0}>a$. $x_0=n_0$ convient.

  Finalement, on a montré que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}f(x)=+\infty$.

- Soit f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x)=\mathrm{e}^x$.

  ▷ Montrons que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty$.
  Soit $a\in\mathbf{R}$ et considérons l'intervalle $I=]a;+\infty[$.
  Montrons qu'il existe x_0 tel que $\forall x\geqslant x_0$, $\mathrm{e}^x\in I$.

  On sait que la suite géométrique de terme général e^n est divergente de limite $+\infty$ car $1<\mathrm{e}$.
  Ainsi il existe un certain rang n_0 tel que $\forall n\geqslant n_0$, $\mathrm{e}^n\in I$.
  Par croissance de l'exponentielle, $x\geqslant n_0\Leftrightarrow\mathrm{e}^x\geqslant\mathrm{e}^{n_0}>a$. $x_0=n_0$ convient.

  Finalement, on a montré que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty$.

  ▷ Pour montrer que $\displaystyle\lim_{n\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$, on peut étudier la suite (e^{-n}) qui géométrique de raison $e^{-1}=\dfrac{1}{e}\in]0;1[$.

□

Remarques 7 On a aussi les limites suivantes. Soient $n\neq0$ et $a\in\mathbf{R}$.

- $\displaystyle\lim_{x\to a}x^n=a^n$
- $\displaystyle\lim_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}$ pour $a\geqslant0$
- $\displaystyle\lim_{x\to a}\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^a$.

2.2 Somme, produit et quotient

On considère dans cette section deux fonctions f et g définies sur un intervalle I.

Théorème 8 | Limite d'une somme

Soient ℓ et ℓ' deux réels. a peut désigner ici $+\infty$ ou $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} \left(f(x)+g(x)\right)$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

Exemples 9 ► $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^4 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{1}{x}+x^4\right) = +\infty$.

► $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^3} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^0 = 1$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x^3}+\mathrm{e}^x\right) = +\infty$.

Théorème 10 | Limite d'un produit

Soient ℓ et ℓ' deux réels. a peut désigner ici $+\infty$ ou $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	ℓ	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell>0$	$\ell<0$	0
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} \left(f(x)g(x)\right)$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Exemples 11 ► $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} -6\mathrm{e}^{-x} = -\infty$.

► $\lim\limits_{x\to 1} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}$ et $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{3x^3-x^2+2} = \sqrt{3-1+2} = 2$ donc $\lim\limits_{x\to 1} \left(\mathrm{e}^x\sqrt{3x^3-x^2+2}\right) = 2\mathrm{e}$.

Théorème 12 | Limite d'un quotient

Soient ℓ et ℓ' deux réels. a peut désigner ici $+\infty$ ou $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	ℓ	ℓ	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\ell'\neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	FI	FI

Si $g(x)>0$ pour tout $x\in I$

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\ell>0$	$\ell<0$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	0^+	0^+
$\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$	$+\infty$	$-\infty$

Si $g(x)<0$ pour tout $x\in I$

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\ell>0$	$\ell<0$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	0^-	0^-
$\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$	$-\infty$	$+\infty$

Exemple 13 $\lim\limits_{x\to 7} \left(2-\dfrac{7}{14-x}\right) = 2-\dfrac{7}{14-7} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 7}\left(x^2-x\right) = 49+7 = 56$ donc $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{2-\frac{7}{14-x}}{x^2-x} = \dfrac{2}{56}$.

3 Comparaison

On a des résultats similaires aux limites de suites, encore.

Théorème 14 | Théorème de comparaison

Soient f et g deux fonctions et x_0 telles que pour tout $x\geqslant x_0$, $f(x)\leqslant g(x)$.

- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Théorème 15 | Théorème des gendarmes

Soient f, g et h trois fonctions et x_0 telles que pour tout $x\geqslant x_0$,

$$f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x).$$

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \ell$.

Exercice 16

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+\cos(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3+7\sin(x)}{x^2}$.

4 Croissances comparées

Théorème 17 | Théorème des croissances comparées

Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{\sqrt{x}} = +\infty$

Démonstration. Démontrons le premier point.

Pour $n = 1$: Montrons d'abord que $\forall x > 0, \dfrac{e^x}{x} > \dfrac{x}{2}$.

Soit f définie sur $\mathbf{R}_+$ par $f(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$, dérivable sur $\mathbf{R}_+$ comme différence de fonctions dérivables sur $\mathbf{R}_+$.

$$f'(x) = e^x - x$$

Montrons que f' est croissante sur $[0;+\infty[$. f' est encore dérivable sur $\mathbf{R}_+$.

$$f''(x) = e^x - 1$$

Par croissance de l'exponentielle, $f'' \geqslant 0$ donc f' est croissante sur $[0;+\infty[$.
Ainsi, $\forall x \in \mathbf{R}_+, f'(x) \geqslant f'(0) = e^0 - 0 = 1 > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbf{R}_+$.

$$\forall x \in \mathbf{R}_+, f(x) > f(0) = 1 > 0 \Leftrightarrow e^x - \frac{x^2}{2} > 0 \Leftrightarrow \frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$$

On peut conclure pour $n = 1$ par thérorème de comparaison car $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$.

Pour $n > 1$:

$$\forall x > 0, \frac{e^x}{x^n} = \frac{\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n}{\left(n \times \frac{x}{n}\right)^n} = \left(\frac{1}{n} \times \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n$$

Par changement de variable, si on pose $y = \frac{x}{n}$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} = \lim\limits_{y \to +\infty} \dfrac{e^y}{y} = +\infty$.

En considérant la composition par $x \mapsto \left(\frac{1}{n}x\right)^n$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{n} \times \dfrac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n = +\infty$.

□

Exercice 18

Déterminer les limites suivantes.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} (2 - xe^x)$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - x)$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(-x^2+1\right)e^x$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{3x}}{x}$