4

Raisonnement par récurrence

Résumé

Nous présentons dans ce chapitre une méthode de démonstration *magique* : le raisonnement par récurrence. Le concept peut être déroutant au premier abord mais il étendra le champ des possibles pour de nombreuses preuves au cours de l'année.

1 Principe de récurrence

Exemples 1 Considérons $(\mathscr{P}_n)$ une suite de propriétés indexées par n entier.

- Si $\mathscr{P}_n$ est la propriété "n est un multiple de 2", alors $\mathscr{P}_n$ est vraie pour n un entier pair mais fausse pour n impair.
- Si $\mathscr{P}_n$: "$4n-28>0$", alors $\mathscr{P}_n$ est vraie pour $n>7$ mais fausse pour $n\leqslant 7$.

Propriété 2 | Récurrence

Soit $(\mathscr{P}_n)$ une suite de propriétés indexées par n entier telle que :

- $\mathscr{P}_{n_0}$ est vraie ;
- pour tout entier $k\geqslant n_0$, si $\mathscr{P}_k$ est vraie alors $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie.

Alors $\mathscr{P}_n$ est vraie pout tout $n\geqslant n_0$.

Remarque 3 Le premier point à vérifier est appelé **initialisation** tandis que le deuxième est l'**hérédité**.

2 Applications

Théorème 4 | Somme des premiers termes

- Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0.

$$\forall n\in\mathbf{N},\ \sum_{i=0}^{n} u_i = \frac{u_0+u_n}{2}\times(n+1)$$

- Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q\neq 0$ et de premier terme u_0.

$$\forall n\in\mathbf{N},\ \sum_{i=0}^{n} u_i = u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Démonstration. Appelons r la raison de la suite (u_n).

- Démontrons pour tout $n\geqslant 0$, par récurrence, que la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour :

$$\mathscr{P}_n : \text{"}\sum_{i=0}^{n} u_i = \frac{u_0+u_n}{2}\times(n+1)\text{"}.$$

Initialisation : Vérifions que $\mathscr{P}_0$ est vraie.
$\sum_{k=0}^{0} u_n = u_0 = \dfrac{u_0+u_0}{2}\times(0+1)$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Supposons que $\mathscr{P}_k$ est vraie pour $k\geqslant 0$ fixé et montrons que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie.

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k+1} u_i &= \sum_{i=0}^{k} u_i + u_{k+1}\\
&= \frac{u_0+u_k}{2}\times(k+1)+u_{k+1} \text{ par hypothèse de récurrence}\\
&= \frac{u_0+u_{k+1}-r}{2}\times(k+1)+\frac{u_{k+1}}{2}+\frac{u_{k+1}}{2}\\
&= \frac{u_0+u_{k+1}}{2}\times(k+1)-\frac{r}{2}(k+1)+\frac{u_0+r(k+1)}{2}+\frac{u_{k+1}}{2}\\
&= \frac{u_0+u_{k+1}}{2}\times(k+1)+\frac{u_0+u_{k+1}}{2}\\
&= \frac{u_0+u_{k+1}}{2}\times(k+2)\end{aligned}$$

Nous venons de prouver que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie.

Nous avons bien démontré par récurrence que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n\geqslant 0$.

► Démontrons pour tout $n \geqslant 0$, par récurrence, que la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour :

$$\mathscr{P}_n : "\sum_{i=0}^{n} u_i = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}".$$

Initialisation : Vérifions que $\mathscr{P}_0$ est vraie.
$\sum_{k=0}^{0} u_n = u_0 = u_0 \frac{1-q^{0+1}}{1-q}$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Supposons que $\mathscr{P}_k$ est vraie pour $k \geqslant 0$ fixé et montrons que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k+1} u_i = \sum_{i=0}^{k} u_i + u_{k+1} \\
&= u_0 \frac{1-q^{k+1}}{1-q} + u_{k+1} \text{ par hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{u_0}{1-q} - \frac{u_0 q^{k+1}}{1-q} + u_{k+1} \\
&= \frac{u_0}{1-q} - \frac{u_0 q^{k+1}}{1-q} + u_0 q^{k+1} \\
&= \frac{u_0}{1-q} - \frac{u_0 q^{k+1}}{1-q} + u_0 q^{k+1} \frac{1-q}{1-q} \\
&= \frac{u_0}{1-q} - \frac{u_0 q^{k+2}}{1-q} \\
&= u_0 \frac{1-q^{k+2}}{1-q}
\end{aligned}$$

Nous venons de prouver que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie.

Nous avons bien démontré par récurrence que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

□

Propriété 5

Soit $n \in \mathbf{N}$.

$$\forall x > 0, (1+x)^n \geqslant 1 + nx$$

Démonstration. Démontrons pour tout $n \geqslant 0$, par récurrence, que la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour :

$$\mathscr{P}_n : "\forall x > 0, (1+x)^n \geqslant 1 + nx".$$

Initialisation : Vérifions que $\mathscr{P}_0$ est vraie.
Soit $x > 0$.
On a $(1+x)^0 = 1$ et $1 + 0 \times x = 1$, c'est-à-dire que $(1+x)^0 \geqslant 1 + 0 \times x$ et donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Supposons que $\mathscr{P}_k$ est vraie pour $k \geqslant 0$ fixé et montrons que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie.
Soit $x > 0$.
Si $\mathscr{P}_k$ est vraie, alors $(1+x)^k \geqslant 1 + kx$ donc :

$$\begin{aligned}
(1+x)^{k+1} &\geqslant (1+x)(1+kx) \\
(1+x)^{k+1} &\geqslant 1 + kx + x + kx^2 \\
(1+x)^{k+1} &\geqslant 1 + (k+1)x + kx^2 \\
(1+x)^{k+1} &\geqslant 1 + (k+1)x \text{ car } kx^2 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Nous venons de prouver que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie.

Nous avons bien démontré par récurrence que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$. □

Propriété 6 | Dérivations successives

Soit $n \in \mathbf{N}$.
Si f est une fonction polynomiale de degré n alors sa dérivée $(n+1)^{\text{e}}$, $f^{(n+1)}$, est nulle.

Démonstration. Notons, $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ avec $a_n \neq 0$. Démontrons pour tout $n \geqslant 0$, par récurrence, que la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour :

$$\mathscr{P}_n : "\forall x \in \mathbf{R}, f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \Rightarrow f^{(n+1)} = 0".$$

Initialisation : Vérifions que $\mathscr{P}_0$ est vraie.
Si $n = 0$, alors f est constante et sa dérivée est nulle.

Hérédité : Supposons que $\mathscr{P}_k$ est vraie pour $k \geqslant 0$ fixé et montrons que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie.
Soit f de degré $k+1$. Ainsi, sa dérivée f' est de degré k et on peut y appliquer l'hypothèse de récurrence : $0 = f'^{(k)} = f^{(k+1)}$.

Nous avons bien démontré par récurrence que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

□