15

FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Résumé

Nous étudions une nouvelle classe de fonctions : les fonctions trigonométriques. Elles disposent, entre autres, de nouvelles propriétés de périodicité et de parité qui nous permettront de restreindre les domaines d'étude.

1 Propriétés générales

1.1 Parité

Soit f une fonction définie sur I, un ensemble symétrique de $\mathbf{R}$ (par exemple, $[-a;a]$ avec $a>0$ ou $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$), de courbe représentative $\mathscr{C}_f$.

Définition 1 | Fonction paire

f est **paire** si :

$$\forall x\in I,\qquad f(-x)=f(x).$$

Dans ce cas, $\mathscr{C}_f$ admet une symétrie axiale par rapport à l'axe des ordonnées dans un repère orthogonal.

Exemples 2 Nous connaissons déjà de nombreuses fonctions paires : les fonctions $x\mapsto x^2$, $x\mapsto x^4$ ou encore $x\mapsto \dfrac{1}{x^2}$.

Définition 3 | Fonction impaire

f est **impaire** si :

$$\forall x\in I,\qquad f(-x)=-f(x).$$

Dans ce cas, $\mathscr{C}_f$ admet une symétrie centrale par rapport à l'origine dans un repère orthogonal.

Exemples 4 Notons les fonctions impaires $x\mapsto x$, $x\mapsto x^3$ ou encore $x\mapsto \dfrac{1}{x}$.

Remarques 5

- Une fonction peut n'être ni paire ni impaire. C'est le cas de la fonction exponentielle dont la courbe n'admet aucun axe de symétrie ou centre de symétrie.
- Une fonction à la fois paire et impaire est nécessairement la fonction nulle :

$$\forall x\in I,\qquad f(-x)=f(x)=-f(x)\Longrightarrow 2f(x)=0.$$

Propriétés 6

- Si f et g sont paires sur I alors toute combinaison linéaire $\lambda f+\mu g$ de f et g est paire sur I.
- Si f et g sont impaires sur I alors toute combinaison linéaire $\lambda f+\mu g$ de f et g est impaire sur I.

Exemples 7 La fonction $x\mapsto 4x^2-27x^4$ est paire sur $\mathbf{R}$ tout comme la fonction $x\mapsto \dfrac{3}{x}-x$ est impaire sur $\mathbf{R}^*$.

Exercice 8

Étudier la parité des fonctions suivantes. Donner aussi leur ensemble de définition.

1. $x\mapsto 4x^6$
2. $x\mapsto 2+x^4$
3. $x\mapsto x-x^3+x^5$
4. $x\mapsto \sqrt{x}$
5. $x\mapsto |x|$
6. $x\mapsto \dfrac{7}{x^3}$

1.2 Périodicité

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de courbe représentative $\mathscr{C}_f$.

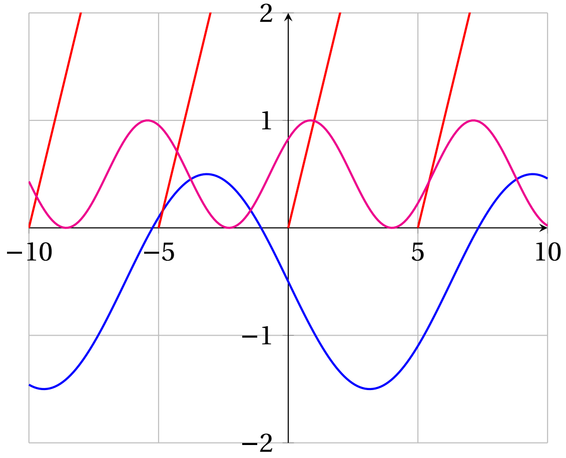
Définition 9 | T-périodicité

Soit $T > 0$. f est dite T-périodique si :

$$\forall x \in I, \qquad f(x+T) = f(x).$$

Dans ce cas, $\mathscr{C}_f$ est invariante par la translation de vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} T \\ 0 \end{pmatrix}$ dans un repère orthogonal.

Exemples 10 On trouve, ci-contre, les courbes de fonctions périodiques.



Exercice 11

1. Quelle est la périodicité d'une fonction constante ?
2. Quelle est la périodicité d'une fonction croissante ?

2 Trigonométrie

2.1 Fonctions cos et sin

Définitions 12

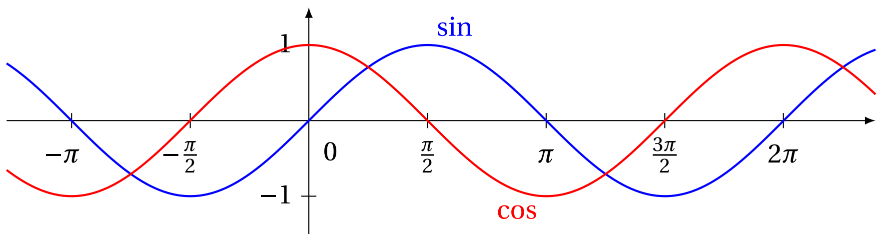
- La fonction **cosinus**, notée cos, est définie sur $\mathbf{R}$ par $x \mapsto \cos(x)$.
- La fonction **sinus**, notée sin, est définie sur $\mathbf{R}$ par $x \mapsto \sin(x)$.

Propriétés 13

- La fonction cos est **paire** sur $\mathbf{R}$.
- La fonction sin est **impaire** sur $\mathbf{R}$.
- cos et sin sont **périodiques** de période 2π.

Démonstration. Clair par construction du sinus et du cosinus via l'enroulement de la droite des réels sur le cercle unité. □

Remarque 14 Par parité et périodicité, connaître les valeurs de $\cos(x)$ et $\sin(x)$ sur $[0;\pi]$ permet de connaître toutes leurs valeurs sur $\mathbf{R}$ et de construire leurs courbes représentatives. C'est ce qu'on appelle restreindre l'étude à l'intervalle $[0;\pi]$.



Théorème 15 | Fonctions dérivées

- La fonction cos est dérivable sur $\mathbf{R}$ et sa dérivée est $-\sin$.

$$\cos' = -\sin$$

- La fonction sin est dérivable sur $\mathbf{R}$ et sa dérivée est cos.

$$\sin' = \cos$$

Démonstration. Hors-programme. □

Corollaire 16 | Continuité

Les fonctions cos et sin sont continues sur $\mathbf{R}$.

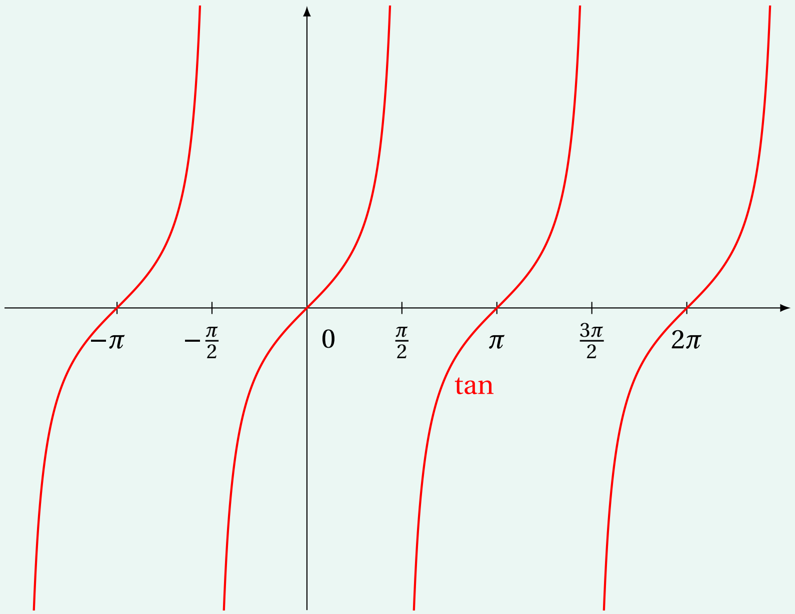
Démonstration. Une fonction dérivable est continue. □

2.2 Fonction tan

Définition 17 | Tangente

On peut définir sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ (et ses intervalles translatés de $k\pi$ pour $k\in\mathbf{Z}$) la fonction **tangente** par :

$$\tan : x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$



Remarques 18 tan n'est pas définie en x tel que $\cos(x)=0$ ce qui arrive en $k\pi$ avec $k\in\mathbf{Z}$.
On peut noter que le nombre $\tan(x)$ n'est pas défini si $x\equiv 0 \pmod{\pi}$.

Propriétés 19

- tan est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et :

$$\tan' = 1+\tan^2$$

- tan est π-périodique.

Démonstration. ▶ tan est dérivable comme quotient de deux fonctions dérivables et :

$$\tan' = \frac{\sin'\cos-\cos'\sin}{\cos^2} = \frac{\cos^2+\sin^2}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2} = 1+\tan^2.$$

▶ Soit $x\in\mathbf{R}$ tel que $\cos(x)\neq 0$.

$$\begin{aligned}\tan(x+\pi) &= \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)}\\ &= \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)}\\ &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\\ &= \tan(x)\end{aligned}$$

□