14

Somme de variables aléatoires

Résumé

Étudier une variable aléatoire, c'est bien. Étudier deux variables aléatoires, c'est mieux. Étudier la somme de ces deux variables aléatoire, c'est ce que l'on veut !

Attention

Dans tout le chapitre, on considère une expérience aléatoire dans un univers Ω **fini**.

1 Somme de variables aléatoires réelles

Définition 1 | Variable aléatoire réelle

Une **variable aléatoire réelle** X sur Ω est une fonction définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbf{R}$.

Exemple 2 On lance une pièce de monnaie et on regarde la face apparente, on gagne 10 € si pile et on perd 10 € si face.
L'univers des possibles est $\Omega = \{\text{pile}; \text{face}\}$. Appelons X la variable aléatoire égale au gain en €.
X ne peut prendre que deux valeurs :

$$X(\text{pile}) = 10 \qquad X(\text{face}) = -10.$$

Définition 3 | Produit par un réel

Soient X une variable aléatoire réelle sur Ω et $a \in \mathbf{R}$.
La variable aléatoire $Y = aX$ est définie sur Ω par :

$$Y(\omega) = aX(\omega).$$

Exemple 4 Dans l'exemple précédent, notons Y la variable aléatoire égale au gain de l'adversaire du joueur (casino, croupier, etc.). Nous avons $Y = -X$.

Définition 5 | Somme

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur Ω.
La variable aléatoire $Z = X + Y$ est définie sur Ω par :

$$Z(\omega) = X(\omega) + Y(\omega).$$

Exemple 6 Toujours dans le même exemple, si on note Z la somme $X+Y$ alors $Z = 0$.

2 Indicateurs usuels

Notons ici que $\Omega = \{\omega_1; \cdots; \omega_r\}$ et que X prend les valeurs $x_1, \dots, x_s$, avec $r \neq 0$, $s \neq 0$ et les x_i distincts.

Lemme 7 | Espérance d'une variable aléatoire

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{r} X(\omega_k) \times \mathbb{P}(\{\omega_k\})$$

Démonstration. On sait, par définition que $\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{s} x_i \times \mathbb{P}(X = x_i)$.
Il "suffit" donc de décomposer chaque événement $\{X = x_i\}$ en réunion disjointe de $\{\omega_k\}$. $\square$

Théorème 8 | Linéarité de l'espérance

Soient X, Y deux variables aléatoires réelles et a, b deux réels.

$$\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]$$

Démonstration. Notons $Z = aX + bY$. Nous avons donc : $\forall \omega \in \Omega, Z(\omega) = aX(\omega) + bY(\omega)$.
En appliquant le lemme précédent à Z, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z] &= \sum_{k=1}^{r} Z(\omega_k) \times \mathbb{P}(\{\omega_k\}) \\
&= \sum_{k=1}^{r} (aX(\omega) + bY(\omega)) \times \mathbb{P}(\{\omega_k\}) \\
&= a\sum_{k=1}^{r} X(\omega_k) \times \mathbb{P}(\{\omega_k\}) + b\sum_{k=1}^{r} Y(\omega_k) \times \mathbb{P}(\{\omega_k\}) && \text{par linéarité de la somme} \\
&= a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]
\end{aligned}$$

□

Propriété 9

Soient X une variable aléatoire réelle et $a \in \mathbf{R}$.

$$\text{Var}(aX) = a^2\text{Var}(X)$$

Démonstration. Notons $Y = aX$. Par définition, $\text{Var}(Y) = \mathbb{E}\left[(Y - \mathbb{E}[Y])^2\right]$.

$$\begin{aligned}
\text{Var}(Y) &= \mathbb{E}\left[(Y - \mathbb{E}[Y])^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(aX - \mathbb{E}[aX])^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(aX - a\mathbb{E}[X])^2\right] && \text{par linéarité de l'espérance} \\
&= \mathbb{E}\left[a^2(X - \mathbb{E}[X])^2\right] \\
&= a^2\mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] && \text{par linéarité de l'espérance} \\
&= a^2\text{Var}(X)
\end{aligned}$$

□

Théorème 10 | Somme indépendante

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles **indépendantes**.

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$$

Démonstration. Admise. □

3 Application à la loi binomiale

Propriété 11

Soit $X \sim \mathscr{B}(n, p)$.
Il existe n variables aléatoires X_i **indépendantes** de loi $\mathscr{B}(p)$ telles que :

$$X = X_1 + \cdots + X_n$$

Démonstration. Admise. □

Propriété 12 | Espérance

Si $X \sim \mathscr{B}(n, p)$, alors :

$$\mathbb{E}[X] = np.$$

Démonstration. On se sert de la propriété précédente, si $X = X_1 + \cdots + X_n$ avec les $X_i \sim \mathscr{B}(p)$ indépendantes.

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_1 + \cdots + X_n] = \mathbb{E}[X_1] + \cdots + \mathbb{E}[X_n] = p + \cdots + p = np$$

□

Propriété 13 | Variance et écart-type

Soit $X \sim \mathscr{B}(n, p)$.

- $\text{Var}(X) = np(1-p)$
- $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

Démonstration. Si $X = X_1 + \cdots + X_n$ avec les $X_i \sim \mathscr{B}(p)$ indépendantes,

$$\text{Var}(X) = \text{Var}(X_1 + \cdots + X_n) = \text{Var}(X_1) + \cdots + \text{Var}(X_n) = p(1-p) + \cdots + p(1-p) = np(1-p)$$

□