# 13

# Intégration

## Résumé

La théorie de l'intégration est riche. Elle est tellement riche que ses applications se retrouvent dans presque tous les pans de l'analyse : calcul d'aires, détermination de primitives, probabilité, transformations de Fourier et Laplace...

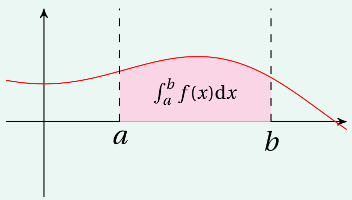
## 1 Intégration géométrique

### Attention

Dans toute la section, $f$ désignera une fonction **continue** définie sur un intervalle **compact** de $\mathbf{R}$, c'est-à-dire, une fonction suffisamment régulière définie sur un $[a;b]$ où $a < b$ sont des réels.

**Définition 1 | Intégrale d'une fonction positive sur un intervalle**

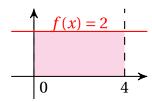
Supposons que $f$ est **positive**.
L'intégrale de $f$ entre $a$ et $b$ est le nombre réel **positif** correspondant à l'**aire sous la courbe** de $f$ entre $x = a$ et $x = b$.




On la note :

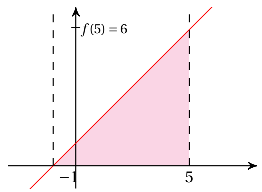
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

**Exemples 2** ► On peut calculer $\int_0^4 2\mathrm{d}x$ qui est l'aire sous la courbe de la fonction constante égale à 2 entre $x = 0$ et $x = 4$.



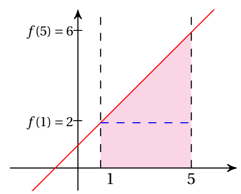

Elle correspond à l'aire d'un rectangle de longueur $4 = 4 - 0$ et de largeur 2, c'est-à-dire, $\int_0^4 2\mathrm{d}x = 8$.

► Pour $\int_{-1}^5 (x+1)\mathrm{d}x$, nous avons à faire à l'aide d'un triangle de base $6 = 5-(-1)$ et de hauteur 6.




On obtient donc $\int_{-1}^5 (x+1)\mathrm{d}x = \dfrac{6\times 6}{2} = 18$.

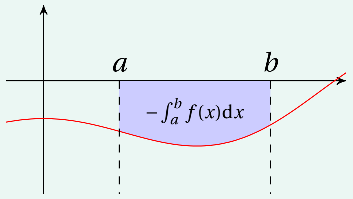
► Pour $\int_1^5 (x+1)\mathrm{d}x$, cette fois ci, c'est un trapèze qui nous intéresse. On peut calculer son aire en considérant le rectangle et le triangle mis en évidence.




$$\int_2^5 (x+1)\mathrm{d}x = 4\times 2 + \frac{4\times 4}{2} = 8+8 = 16$$

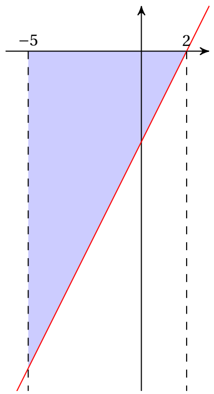
## Définition 3 | Intégrale d'une fonction négative sur un intervalle

Supposons que $f$ est **négative**.
L'intégrale de $f$ entre $a$ et $b$ est le nombre réel **négatif** correspondant à l'**aire algébrique sous la courbe** de $f$ entre $x = a$ et $x = b$.




Cette aire est l'opposée de l'**aire absolue** obtenue par un calcul d'aire classique et représentée au dessus.

**Exemple 4** $\int_{-5}^{2}(2x-4)\mathrm{d}x = -49$ car l'aire absolue sous la courbe est celle d'un triangle de base 7 et de hauteur $(2\times 2-4)-(2\times(-5)-4) = 14$ donc d'aire $\dfrac{7\times 14}{2} = 49$ mais le triangle est sous l'axe des abscisses : la fonction est négative sur $[-5;2]$.




## Propriétés 5

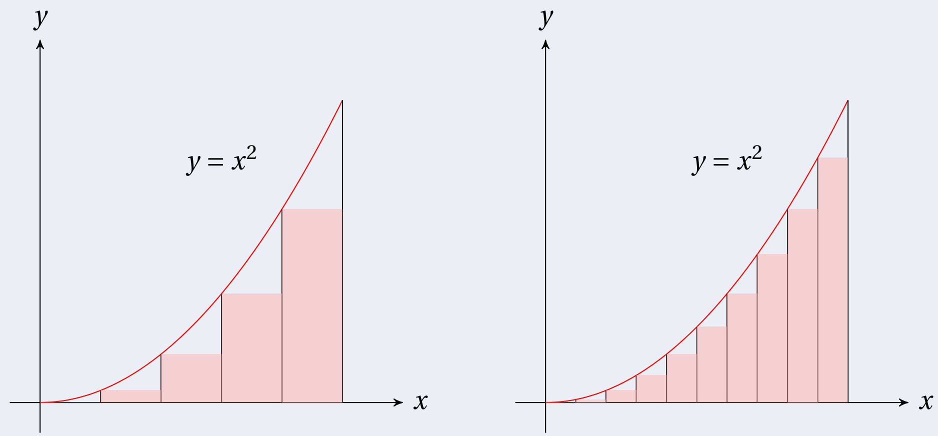
- Relation de Chasles : $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x$
- Anti-symétrie : $\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$
- Comparaison :

  Si $g \geqslant f$ sur $[a;b]$ alors $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

**Remarque 6** La relation de Chasles nous permet donc de gérer le cas des fonctions de signe quelconque. Il suffit de découper le domaine de définition de $f$ selon qu'elle soit positive ou négative est de sommer les aires algébriques associées.

## Méthode 7 | Approche de l'intégrale par la méthode des rectangles

On peut approcher l'intégrale d'une fonction $f$ en utilisant l'aire de rectangles sous la courbe de $f$. Ci-contre, la courbe de la fonction carré sur $[0;1]$.




En augmentant le nombre de rectangles, on approche de la valeur de l'aire.

## Exercice 8

Déterminer les intégrales suivantes en se ramenant à des calculs d'aires relatives.

1. $\int_0^{10} 2x-4\mathrm{d}x$
2. $\int_{-1}^{1} x\mathrm{d}x$
3. $\int_{-3}^{3} x^3\mathrm{d}x$
4. $\int_4^7 3x+1\mathrm{d}x$

**Propriété 9 | Linéarité**

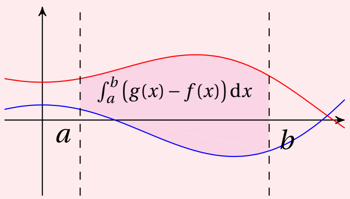
Soient $f$ et $g$ définies sur $[a;b]$ ainsi que $k$ un réel.

- $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\mathrm{d}x$
- $k \times \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b k f(x)\mathrm{d}x$

## 2 Intégration plus avancée

**Propriété 10 | Aire entre deux courbes**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues définies sur le même intervalle $[a;b]$ telles que $g \geqslant f$.
L'aire absolue entre les courbes de $f$ et $g$ ainsi que $x=a$ et $x=b$ correspond à l'intégrale $\int_a^b \big(g(x)-f(x)\big)\mathrm{d}x$.




**Définition 11 | Valeur moyenne**

On appelle **valeur moyenne** de $f$ entre $a$ et $b$ le nombre $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

**Remarque 12** C'est une extension de la moyenne algébrique $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ pour une série $x_1, \cdots, x_n$.

**Lemme 13**

Soit $f$ continue sur un intervalle $[a;b]$. Il existe $c \in [a;b]$ tel que :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(c)(b-a).$$

*Démonstration.* On admet que, par continuité, $f$ admet un maximum atteint en $M \in [a;b]$ et un minimum atteint en $m \in [a;b]$.
Ainsi, pour tout $x \in [a;b]$, $f(m) \leqslant f(x) \leqslant f(M)$ et donc :

$$(b-a)f(m) = \int_a^b f(m)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(M)\mathrm{d}x = (b-a)f(M)$$

$(b-a)f$ étant continue sur $[m;M]$ (supposons que $m \leqslant M$ sans perdre de généralité), par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [m;M]$ tel que $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(c)(b-a)$. □

**Théorème 14 | Théorème fondamental de l'analyse**

Toute fonction $f$ continue sur un intervalle $I$ admet une unique primitive s'annulant en $a \in I$. On la note $F_a$ et on a :

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$$

*Démonstration.* Soit $h>0$ et $x \in I$.

$$\frac{F_a(x+h)-F_a(x)}{h} = \frac{\int_a^{x+h} f(t)\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\mathrm{d}t}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t}{h}$$

D'après le lemme précédent, il existe $c \in [x;x+h]$ tel que $\int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t = hf(c)$.
Donc, $\dfrac{F_a(x+h)-F_a(x)}{h} = f(c)$.
Enfin,

$$\min_{t\in[x;x+h]} f(t) \leqslant f(c) \leqslant \max_{t\in[x;x+h]} f(t).$$

Ainsi, par le théorème des gendarmes et la continuité de $f$ sur $I$, alors :
$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F_a(x+h)-F_a(x)}{h} = f(x)$. □

**Théorème 15 | Calcul primitif**

Soit $F$ une primitive de $f$ sur $[a;b]$.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a) = \left[F(x)\right]_a^b$$

*Démonstration.* $F$ et $F_a$ diffèrent d'une constante $c$ : $F = F_a + c$. Ainsi,

$$\begin{aligned} F(b)-F(a) &= F_a(b)+c-F_a(a)-c \\ &= \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + c - \int_a^a f(t)\mathrm{d}t - c \\ &= \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$ □

**Remarque 16** Il est désormais extrêmement facile de calculer une intégrale pour des fonctions usuelles.

**Exemples 17**
- $\int_2^7 x+4\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}+4x\right]_2^7 = \left(\frac{7^2}{2}+4\times 7\right) - \left(\frac{2^2}{2}+4\times 2\right) = 42{,}5.$
- $\int_{-1}^3 \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = \left[\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\right]_{-1}^3 = \left(\frac{\mathrm{e}^{2\times 3}}{2}\right) - \left(\frac{\mathrm{e}^{2\times(-1)}}{2}\right) = \frac{\mathrm{e}^6}{2} - \frac{\mathrm{e}^{-2}}{2}.$

**Théorème 18 | Intégration par parties**

Soient $f$ continue sur un intervalle $I$ de primitive $F$, $g$ dérivable sur $I$ et $a, b \in I$.

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \left[F(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\mathrm{d}x$$

*Démonstration.* $Fg$ est une primitive de $F'g + Fg' = fg + Fg'$. Ainsi :

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x + \int_a^b F(x)g'(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \left(f(x)g(x)+F(x)g'(x)\right)\mathrm{d}x = \left[F(x)g(x)\right]_a^b.$$

□