12

Primitives et équations différentielles

Résumé

La théorie de la dérivation, découverte l'an dernier, est vaste. Deux thèmes majeurs en font partie : les primitives d'une fonction et les équations différentielles, des équations de fonctions dérivables qu'on souhaite naturellement résoudre.

1 Primitives

Définition 1 | Primitive d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On appelle **primitive** de f toute fonction F définie et dérivable sur I telle que :

$$\forall x \in I, F'(x) = f(x).$$

Remarque 2 Si une telle primitive existe alors il en existe une **infinité** car G définie sur I par $G(x) = F(x) + c$ où $c \in \mathbf{R}$ est encore une primitive de f.

Exemple 3 Soit f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 4x$
La fonction F définie sur $\mathbf{R}$ par $F(x) = x^3 - 2x^2 + 5$ est une primitive de f car F est dérivable et pour tout $x \in \mathbf{R}, F'(x) = 3x^2 - 4x = f(x)$.

Théorème 4 | Existence d'une primitive

Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive.

Démonstration. Admise pour le moment. □

Propriétés 5 | Récapitulatif des primitives usuelles

Dans le tableau suivant, F est une primitive de f et C une constante réelle.

$f(x)$	$F(x)$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \geqslant 0)$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C \quad (x \neq 0)$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C \quad (n \geqslant 2,\ x \neq 0)$
e^x	$e^x + C$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + C \quad (x > 0)$

Démonstration. Dériver F dans chaque cas. □

Exercice 6

Déterminer les primitives de f dans chacun des cas suivants, f étant définie sur I.

1. $f(x) = -2x^3 + 3$ et $I = \mathbf{R}$
2. $f(x) = \frac{1}{7}x^6 - \frac{2}{x}$ et $I = \mathbf{R}^*$
3. $f(x) = e^{8x-1}$ et $I = \mathbf{R}$
4. $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}$ et $I = \mathbf{R}^*$

2 Équations différentielles

2.1 Première approche

Définition 7

On appelle **équation différentielle d'ordre 1** une équation d'inconnue y, une **fonction**, dans laquelle intervient y', sa dérivée.
Une **solution** f de cette équation différentielle est une fonction vérifiant l'égalité.

Remarques 8

- L'équation différentielle $y' = y$ associée à la condition $y(0) = 1$ a une solution unique qui est la fonction exponentielle.
- Une primitive d'une fonction f est solution de l'équation différentielle $y' = f$.

Exemples 9 ▶ $y' + y = 0$ est une équation différentielle d'ordre 1.

On définit sur $\mathbf{R}$ des fonctions f et g par $f(x) = 12\exp(-x)$ et $g(x) = x^2 + 10$. On vérifie que pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$f'(x) + f(x) = -12\exp(-x) + 12\exp(-x) = 0 \text{ donc } \boxed{f' + f = 0}$$

mais

$$g'(x) + g(x) = 2x + x^2 + 10 = x^2 + 2x + 10 \neq 0 \text{ donc } \boxed{g' + g \neq 0.}$$

f est une solution de $y' + y = 0$ mais g n'en est pas une.

▶ $(y')^2 = 4y$ est aussi une équation différentielle d'ordre 1. La fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^2$ est une solution.

En effet, $(f'(x))^2 = (2x)^2 = 4x^2$ et $4f(x) = 4x^2$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ donc $\boxed{(f')^2 = 4f.}$

Remarques 10 ▶ On peut définir des équations différentielles d'ordres supérieurs. C'est-à-dire, des équations différentielles mettant en œuvre des dérivées de y d'ordres supérieurs comme la dérivée seconde $y'' = (y')'$, la dérivée tierce $y''' = (y'')'$ et les dérivées successives suivantes qu'on note $y^{(n)}$.

▶ Une équation différentielle peut s'écrire de différentes manières suivant le contexte ou le problème.

Ainsi, on peut écrire $4y' - 2y = 2$ des manières suivantes.

- ▷ $4\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) - 2y(t) = 2$ qui est utilisée quand y est une fonction de plusieurs variables : temps, espace, angle, ...
- ▷ $4y'(t) - 2y(t) = 2$ utilisée généralement pour des problèmes en physique ou en chimie.
- ▷ $4y'(x) - 2y(x) = 2$ pour des exercices plutôt mathématiques.

Exemple 11 Soit $\omega \in \mathbf{R}^*$.
$y'' + \omega^2 y = 0$ est une équation différentielle d'ordre 2.

2.2 Équations différentielles de la forme $y' = ay + b$

Théorème 12

Soient $a \in \mathbf{R}^*$ et $b \in \mathbf{R}$ des coefficients constants.
L'équation différentielle $y' = ay + b$ admet comme uniques solutions définies sur $\mathbf{R}$, les fonctions f sous la forme suivante où C est une constante réelle

$$f(x) = C\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}.$$

Démonstration. Démontrons que ces fonctions là sont bien des solutions sur $\mathbf{R}$ de $y' = ay + b$.
Soit $C \in \mathbf{R}$ et f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = C\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}$.
On calcule f' d'une part et $af + b$ de l'autre. Soit x réel.

$$f'(x) = \boxed{aC\mathrm{e}^{ax}}$$

$$\begin{aligned} af(x) + b &= a\left(C\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}\right) + b \\ &= aC\mathrm{e}^{ax} - b + b \\ &= \boxed{aC\mathrm{e}^{ax}} \end{aligned}$$

f est bien solution de $y' = ay + b$. □

Exemples 13 ▶ Les solutions f de $y' = 5y + 10$ sont définies sur $\mathbf{R}$ sous la forme $\boxed{f(x) = C\mathrm{e}^{5x} - 2}$. En effet, $a = 5$ et $b = 10$.

▶ On considère l'équation différentielle $6y' - 4y = 8y' + 8$. Elle peut se réécrire :

$$\begin{aligned} & 6y' - 4y = 8y' + 8 \\ \Leftrightarrow\ & -2y' = 4y + 8 \\ \Leftrightarrow\ & y' = -2y - 4 \end{aligned}$$

Ainsi, les solutions f de $6y' - 4y = 8y' + 8$ sont définies sur $\mathbf{R}$ sous la forme $\boxed{f(x) = C\mathrm{e}^{5x} - 2}$. En effet, $a = 5$ et $b = 10$.

Exercice 14

Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y' = 3y$
2. $y' = -2y + 1$
3. $4y' + 6y = 0$
4. $\frac{1}{3}y' - 12y - 2 = 0$

Théorème 15 | Problème de Cauchy

On définit parfois des équations différentielles avec une condition initiale $y(0) = y_0 \in \mathbf{R}$. C'est ce qu'on appelle un **problème de Cauchy**.
Soient $a \in \mathbf{R}^*$, $b \in \mathbf{R}$ et $y_0 \in \mathbf{R}$.
L'équation différentielle $\begin{cases} y' = ay + b \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ admet une **unique** fonction f solution définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(x) = \left(y_0 + \frac{b}{a}\right)\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}.$$

Exemple 16 Soit le problème de Cauchy suivant.

$$\begin{cases} y' = -3y + 9 \\ y(0) = 6 \end{cases}$$

L'unique solution f est définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \left(6 + \frac{9}{-3}\right)\mathrm{e}^{-3x} - \frac{9}{-3} = 3\mathrm{e}^{-3x} + 3$.

Exercice 17

Résoudre les problèmes différentiels suivants.

1. $\begin{cases} y' = y - 3 \\ y(0) = 1 \end{cases}$
2. $\begin{cases} y' = 5y + 15 \\ y(-1) = 1 \end{cases}$

2.3 Équations différentielles de la forme $y' = ay + f$

Dans toute la section, on considère a un réel et f une fonction définie sur un intervalle I.

Propriété 18

Soit φ une solution de l'équation différentielle $y' = ay + f$.
g est solution de $y' = ay + f$ si, et seulement si, $g - \varphi$ est solution de $y' = ay$.

Démonstration. On sait que $\varphi' = a\varphi + f$.

$$\begin{aligned} & g' = ag + f \\ \Leftrightarrow\ & g' - \varphi' = ag + f - (a\varphi + f) \\ \Leftrightarrow\ & (g - \varphi)' = a(g - \varphi) \end{aligned}$$

□

Théorème 19

Si l'équation $y' = ay + f$ admet une solution **particulière** φ alors elle admet comme uniques solutions les fonctions définies sur I telles que :

$$y(x) = C\mathrm{e}^{ax} + \varphi(x), \qquad C \in \mathbf{R}.$$

Démonstration. C'est une conséquence directe du résultat précédent et de la forme générale des solutions de l'équation $y' = ay$. □

Exemple 20 Soit l'équation $y' = y - x^2 + x$. Ici, $a = 1$ et f est d'expression $f(x) = -x^2 + x$.
On a envie de chercher une solution particulière polynomiale de degré 2. Posons $\varphi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$
Si φ vérifie l'équation différentielle, alors :

$$\begin{aligned} & \varphi'(x) = \varphi(x) - x^2 + x \\ \Leftrightarrow\ & 2\alpha x + \beta = \alpha x^2 + \beta x + \gamma - x^2 + x \\ \Leftrightarrow\ & 0 = (\alpha - 1)x^2 + (\beta + 1 - 2a)x + (\gamma - \beta) \end{aligned}$$

Ainsi, $\alpha = 1$ et $\gamma = \beta$ par identification de polynômes puis $\beta = 1$.
$\varphi(x) = x^2 + x + 1$ est une solution particulière.
Finalement, les solutions générales de l'équation différentielle sont sous la forme :

$$y(x) = C\mathrm{e}^x + \varphi(x) = C\mathrm{e}^x + x^2 + x + 1 \qquad \text{où } C \text{ est une constante réelle.}$$