

DEVOIR SURVEILLÉ 6

Calculatrice autorisée

Mardi 5 mai 2026

EXERCICE 1 (2 POINTS)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel non nul et $0 \leq k \leq n$.

Si $X \sim \mathcal{B}(n; p)$, donner une expression de $\mathbb{P}(X = k)$ en fonction de n , p et k .

CORRECTION

Si $X \sim \mathcal{B}(n; p)$, alors pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

EXERCICE 2 (5 POINTS)

Dans chaque cas, indiquer si la variable aléatoire X suit une loi uniforme, une loi de Bernoulli ou aucune de ces deux lois. Le cas échéant, préciser les paramètres de cette loi et l'épreuve de Bernoulli associée.

1. On lance un dé cubique équilibré. La variable aléatoire X prend la valeur 0 si on obtient un multiple de trois et prend la valeur 1 sinon.
2. On lance un dé tétraédrique équilibré. On note X la variable aléatoire égale au double des points qu'affiche le dé.
3. On lance deux dés équilibrés. La variable aléatoire X prend la valeur 0 si on obtient un double et 1 sinon.
4. Un jeu de tarot compte 78 cartes dont 21 atouts numérotés de 1 à 21. On tire une carte au hasard parmi les atouts d'un jeu de tarot. X est la variable aléatoire égale au numéro de l'atout tiré.
5. Dans un jeu de tarot, on tire une carte au hasard. X est la variable aléatoire égale à 1 si on obtient un atout et égale à 0 sinon.

CORRECTION

1. La variable aléatoire X ne prend que les valeurs 0 et 1.

L'événement associé à la valeur 1 est : « obtenir un nombre qui n'est pas multiple de 3 ».

Sur un dé équilibré :

$$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Donc X suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{2}{3}$.

L'épreuve de Bernoulli associée est :

- succès : « le résultat n'est pas un multiple de 3 » ;
- échec : « le résultat est un multiple de 3 ».

2. Les valeurs possibles de X sont :

$$2, 4, 6, 8.$$

Chaque valeur a la même probabilité :

$$\frac{1}{4}.$$

Donc X suit une loi uniforme sur $\{2; 4; 6; 8\}$.

3. La variable aléatoire X ne prend que les valeurs 0 et 1.

L'événement associé à la valeur 1 est : « ne pas obtenir un double ».

Avec deux dés :

$$\mathbb{P}(\text{double}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Donc :

$$\mathbb{P}(X = 1) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

Ainsi, X suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{5}{6}$.

L'épreuve de Bernoulli associée est :

- succès : « ne pas obtenir un double »;
- échec : « obtenir un double ».

4. Les valeurs possibles de X sont :

$$1, 2, 3, \dots, 21.$$

Chaque numéro d'atout a la même probabilité :

$$\frac{1}{21}.$$

Donc X suit une loi uniforme sur $\{1; 2; \dots; 21\}$.

5. La variable aléatoire X prend les valeurs 0 et 1.

L'événement associé à la valeur 1 est : « obtenir un atout ».

Comme il y a 21 atouts parmi 78 cartes :

$$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{21}{78} = \frac{7}{26}.$$

Donc X suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{7}{26}$.

L'épreuve de Bernoulli associée est :

- succès : « obtenir un atout »;
- échec : « ne pas obtenir d'atout ».

EXERCICE 3 (13 POINTS)

Une usine automobile produit chaque jour 5 000 pièces destinées à l'assemblage de moteurs.

Chaque pièce présente un défaut, indépendamment des autres, avec une probabilité 0,0015. Si une pièce est détectée comme défectueuse, elle est mise au rebut. Une vérification coûte 1,20 euro et la mise au rebut d'une pièce défectueuse coûte 12 euros.

1. On note D la variable aléatoire donnant le nombre de pièces défectueuses.

- Déterminer la loi de D et calculer son espérance mathématique.
- À l'aide de la calculatrice, donner la probabilité que moins de 0,2% des pièces soient défectueuses.
- Déterminer le coût moyen journalier du contrôle (vérification et mise au rebut).

2. Afin de réduire les coûts, une nouvelle procédure est mise en place :

- les pièces sont regroupées par lots de 20;
- chaque lot est vérifié pour un coût de 3,50 euros;
- si au moins une pièce du lot est défectueuse, tout le lot est mis au rebut pour un coût de 90 euros.

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de lots mis au rebut.

- On admet que X suit une loi binomiale de paramètres $n = 250$ et $p = 0,03$.

- b.** Déterminer le coût moyen journalier du nouveau dispositif.
c. Calculer l'économie moyenne espérée par jour grâce à cette nouvelle procédure.

CORRECTION

- 1. a.** Chaque pièce a une probabilité $p = 0,0015$ d'être défectueuse, indépendamment des autres.
 Comme l'usine produit $n = 5000$ pièces par jour, la variable aléatoire D suit une loi binomiale :

$$D \sim \mathcal{B}(5000; 0,0015).$$

Son espérance vaut :

$$E(D) = np.$$

Donc :

$$E(D) = 5000 \times 0,0015 = 7,5.$$

En moyenne, 7,5 pièces sont défectueuses chaque jour.

- b.** Moins de 0,2% de pièces défectueuses signifie :

$$0,2\% \times 5000 = 10.$$

On cherche donc :

$$\mathbb{P}(D < 10) = \mathbb{P}(D \leq 9).$$

À la calculatrice :

$$\mathbb{P}(D \leq 9) \approx 0,776.$$

- c.** Chaque pièce est vérifiée.

Le coût quotidien des vérifications est :

$$5000 \times 1,20 = 6000 \text{ euros.}$$

Le nombre moyen de pièces défectueuses est 7,5.

Le coût moyen de mise au rebut est donc :

$$7,5 \times 12 = 90 \text{ euros.}$$

Ainsi, le coût moyen journalier total est :

$$\boxed{6090 \text{ euros}}.$$

- 2. a.** On admet :

$$X \sim \mathcal{B}(250; 0,03).$$

- b.** Le coût des vérifications est :

$$250 \times 3,50 = 875 \text{ euros.}$$

Le nombre moyen de lots mis au rebut vaut :

$$E(X) = np = 250 \times 0,03 = 7,5.$$

Le coût moyen des mises au rebut est :

$$7,5 \times 90 = 675 \text{ euros.}$$

Le coût moyen journalier du nouveau dispositif est donc :

$$875 + 675 = \boxed{1550 \text{ euros}}.$$

- c.** L'ancien coût moyen était de 6090 euros.

Le nouveau coût moyen est de 1550 euros.

L'économie moyenne espérée par jour est donc :

$$6090 - 1550 = \boxed{4540 \text{ euros}}.$$