

## DEVOIR SURVEILLÉ 5

Calculatrice autorisée

Mardi 20 janvier 2026

### EXERCICE 1 (4 POINTS)

Exprimer  $f'(x)$  en fonction de  $x$ .

1.  $f(x) = 2x^3 - 3x + 2$  pour  $x \in \mathbb{R}$ ;

2.  $h(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{2x - 4}$  pour  $x \neq 2$ .

### CORRECTION

1.  $f(x) = 2x^3 - 3x + 2$  est une fonction polynomiale, donc dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

$$f'(x) = 6x^2 - 3.$$

2. Pour  $x \neq 2$ , on écrit  $h(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$  avec

$$u(x) = x^2 - 3x + 1 \quad \text{et} \quad v(x) = 2x - 4.$$

On a  $u'(x) = 2x - 3$  et  $v'(x) = 2$ .

Par la formule de dérivation d'un quotient :

$$h'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}.$$

Ainsi,

$$h'(x) = \frac{(2x - 3)(2x - 4) - 2(x^2 - 3x + 1)}{(2x - 4)^2} = \frac{2x^2 - 8x + 10}{(2x - 4)^2}.$$

### EXERCICE 2 (6 POINTS)

Soit  $g$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par :

$$g(x) = x^3 + x - 1.$$

1. Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $x_0$  dans l'intervalle  $[0; 1]$ .

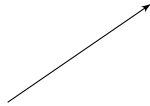
2. Montrer que  $x_0$  est l'unique solution de  $g(x) = 0$  dans  $[0; +\infty[$ .

### CORRECTION

La fonction  $g(x) = x^3 + x - 1$  est dérivable sur  $[0; +\infty[$  et

$$g'(x) = 3x^2 + 1.$$

Pour tout  $x \geq 0$ , on a  $g'(x) > 0$ , donc  $g$  est strictement croissante sur  $[0; +\infty[$ .

| $x$        | 0 | $+\infty$                                                                           |
|------------|---|-------------------------------------------------------------------------------------|
| $3x^2 + 1$ | + |                                                                                     |
| $g(x)$     |   |  |

1. On calcule :

$$g(0) = -1 \quad \text{et} \quad g(1) = 1.$$

Comme  $g$  est continue et strictement croissante sur  $[0; 1]$ , d'après le corollaire du **théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $x_0$  dans  $[0; 1]$ .

2. La fonction  $g$  étant strictement croissante sur  $[0; +\infty[$ , l'équation  $g(x) = 0$  ne peut admettre qu'une seule solution sur cet intervalle puisque  $g(1) = 1$  est le minimum de  $g$  sur  $[1; +\infty[$ . Cette solution est donc  $x_0$ .

### EXERCICE 3 (10 POINTS)

Le nombre de chimpanzés, en milliers, à l'année  $(2020+x)$ , d'une forêt est modélisé pour les dix premières années par la fonction  $f$  définie sur  $[0; 10]$  par :

$$f(x) = x + 2 + \frac{4}{x+1}.$$

On admet que  $f$  est dérivable sur  $[0; 10]$ .

1. Montrer que  $f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}$ .

2. En déduire les variations de  $f$  sur  $[0; 10]$  à l'aide d'un tableau.

3. Montrer que l'équation  $f(x) = 6$  admet deux solutions sur  $[0; 10]$  qui sont  $x = 0$  et  $x = 3$ .

4. Sur cette période de dix ans, combien de fois la population de chimpanzés atteindra-t-elle 9 000 chimpanzés? Justifier mathématiquement.

### CORRECTION

1. On a :

$$f(x) = x + 2 + \frac{4}{x+1}.$$

Donc

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 4}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}.$$

2. Étudions le signe de  $x^2 + 2x - 3$  sur  $\mathbf{R}$ .

Son discriminant  $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$ . Ainsi,  $x^2 + 2x - 3$  possède deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{16}}{2} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-2 - \sqrt{16}}{2} = -3.$$

| $x$        | $-\infty$ | $-3$ | $-1$ | $1$ | $+\infty$ |   |
|------------|-----------|------|------|-----|-----------|---|
| $x^2+2x-3$ | +         | 0    | -    | -   | 0         | + |
| $(x+1)^2$  | +         |      | +    | 0   | +         | + |
| $f'(x)$    | +         | 0    | -    | -   | 0         | + |
| $f(x)$     |           |      |      |     |           |   |

$f$  est strictement croissante sur  $[0; 1]$  puis strictement décroissante sur  $[1; 10]$ .

3. On a d'abord :

- $f(0) = 6$

- $f(1) = 5$
- $f(10) \approx 12,4$

Ainsi,  $f(0) \leq 6 \leq f(1)$  et  $f(1) < 6 \leq f(10)$ .

En appliquant le **TVI** sur  $[0; 1]$  et  $]1; 10]$  (d'après la question précédente et puisque  $f$  est continue), il existe 2 solutions sur  $[0; 10]$  à l'équation  $f(x) = 6$ . Enfin, par le calcul on vérifie simplement que  $f(0) = f(3) = 6$ .

4. 9000 chimpanzés correspondent à 9 milliers. On cherche donc le nombre de solutions de  $f(x) = 9$  sur  $[0; 10]$ .

Il n'y en pas sur  $[0; 1]$  puisque le maximum de  $f$  y est de 6. On a :

- $f(1) \leq 9 \leq f(10)$
- $f$  est continue sur  $[1; 10]$
- $f$  est strictement croissante sur  $[1; 10]$ .

D'après le corollaire du **théorème des valeurs intermédiaires**, il existe une unique solution à  $f(x) = 9$  sur  $[1; 10]$  et donc aussi sur  $[0; 10]$ .