DEVOIR SURVEILLÉ 4

Calculatrice autorisée

Lundi 15 décembre 2025

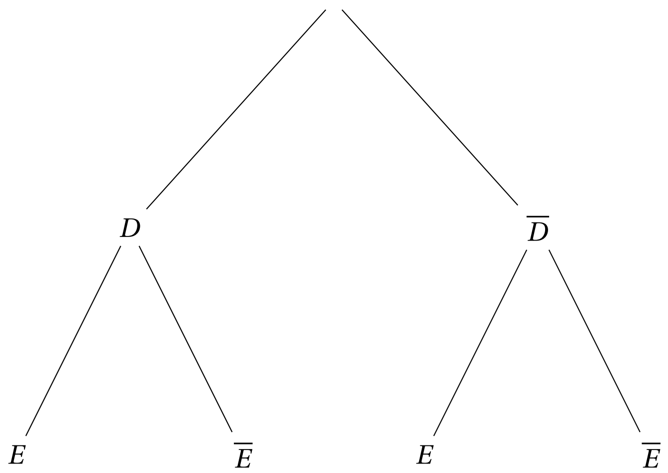
EXERCICE 1 (10 POINTS)

Une entreprise fabrique des cartes mères.

La proportion p de cartes défectueuses produites est telle que $0 \leqslant p \leqslant 1$. Le directeur met en place un système de test systématique pour éviter de mettre sur le marché des cartes défectueuses. Pour des raisons techniques, ce test n'est pas parfait. Il exclut de la mise sur le marché seulement 95% des cartes défectueuses mais aussi 2% des cartes non défectueuses.

1. On note D l'événement « La carte est défectueuse » et $\overline{D}$ son contraire. On note E l'événement « La carte est exclue de la mise sur le marché ».

Compléter l'arbre de probabilité ci-dessous.



2. Le directeur constate que 6% des cartes fabriquées sont exclues de la mise sur le marché.

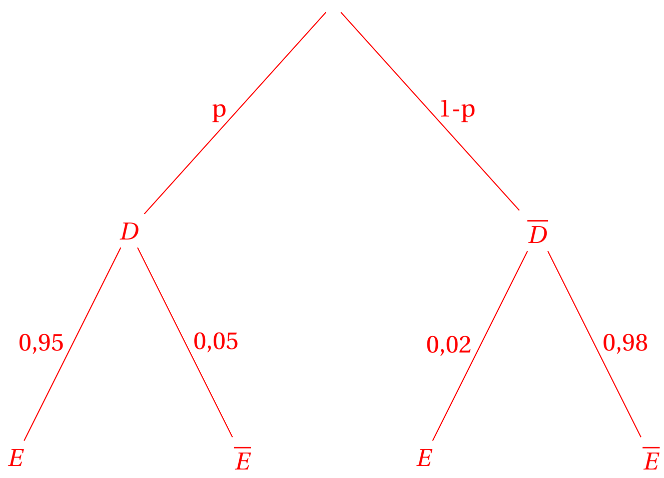
- **a.** Déterminer la valeur de p. Arrondir au millième.
- **b.** Calculer la probabilité qu'une carte soit défectueuse sachant qu'elle a été mise sur le marché. Arrondir au millième.

3. Le directeur souhaite que la probabilité qu'une carte soit défectueuse sachant qu'elle a été mise sur le marché soit désormais inférieure ou égale à 0,1%. Pour cela, il veut améliorer la qualité de fabrication et ainsi diminuer la proportion p de cartes produites défectueuses, tout en conservant le même système de test.

Déterminer les valeurs de p pour lesquelles son objectif est atteint (donner la condition sur p et l'arrondi au millième).

CORRECTION

1. On complète l'arbre de probabilités :



2. On sait que $\mathbb{P}(E) = 0{,}06$.

a. Par la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E \cap D) + \mathbb{P}(E \cap \overline{D})$$

Donc :

$$\begin{aligned} & 0{,}06 = 0{,}95p + 0{,}02(1-p) \\ \Leftrightarrow & 0{,}06 = 0{,}95p + 0{,}02 - 0{,}02p \\ \Leftrightarrow & 0{,}04 = 0{,}93p \\ \Leftrightarrow & p = \frac{0{,}04}{0{,}93} \approx 0{,}043 \end{aligned}$$

Donc la probabilité qu'une carte soit défectueuse est d'environ 0,043.

b. On cherche $\mathbb{P}_{\overline{E}}(D)$.

$$\mathbb{P}(D \mid \overline{E}) = \frac{\mathbb{P}(D \cap \overline{E})}{\mathbb{P}(\overline{E})}$$

$$\mathbb{P}(D \cap \overline{E}) = p \times 0{,}05$$
$$\mathbb{P}(\overline{E}) = 1 - \mathbb{P}(E) = 0{,}94$$

$$\mathbb{P}_{\overline{E}}(D) = \frac{0{,}05p}{0{,}94}$$

Avec $p \approx 0{,}043$:

$$\mathbb{P}_{\overline{E}}(D) \approx \frac{0{,}05 \times 0{,}043}{0{,}94} \approx 0{,}002$$

3. On veut :

$$\mathbb{P}_{\overline{E}}(D) \leqslant 0{,}001$$

Or :

$$\mathbb{P}_{\overline{E}}(D) = \frac{0{,}05p}{1 - \big(0{,}95p + 0{,}02(1-p)\big)}$$

$$\mathbb{P}_{\overline{E}}(D) = \frac{0{,}05p}{0{,}98 - 0{,}93p}$$

On résout :

$$\frac{0{,}05p}{0{,}98 - 0{,}93p} \leqslant 0{,}001$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & 0{,}05p \leqslant 0{,}001(0{,}98 - 0{,}93p) \\ \Leftrightarrow & 0{,}05p \leqslant 0{,}00098 - 0{,}00093p \\ \Leftrightarrow & 0{,}05093p \leqslant 0{,}00098 \\ \Leftrightarrow & p \leqslant \frac{0{,}00098}{0{,}05093} \approx 0{,}01924 \end{aligned}$$

L'objectif est atteint si :

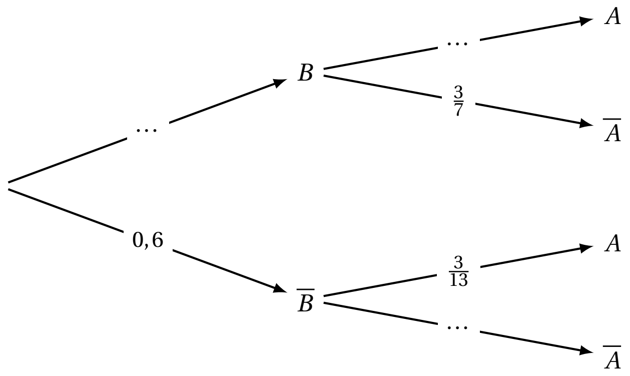
$$p \leqslant 0{,}019$$

EXERCICE 2 (5 POINTS)

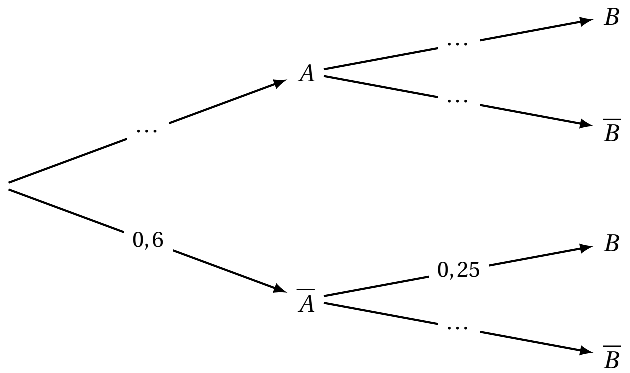
A et B sont des évènements d'un univers Ω.

1. Compléter les arbres pondérés ci-dessous. Les deux questions sont indépendantes.

a.



b. On sait ici que $\mathbb{P}(B) = 0{,}35$.

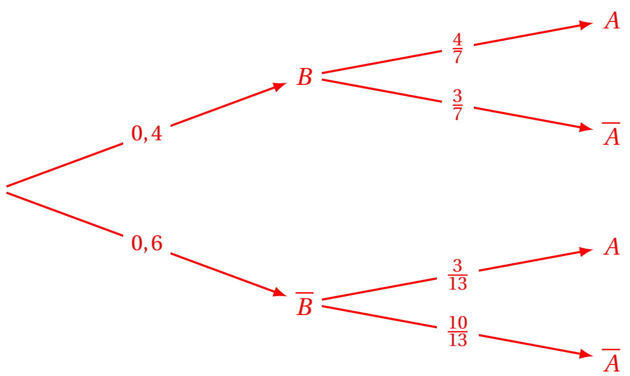


2. À partir du premier arbre, déterminer $\mathbb{P}(A)$.

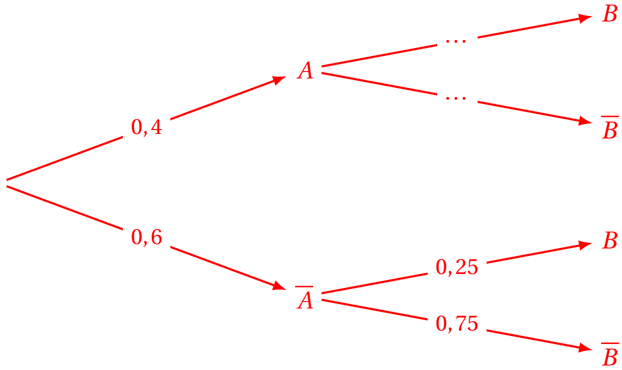
CORRECTION

1. Complétons les arbres pondérés.

a.



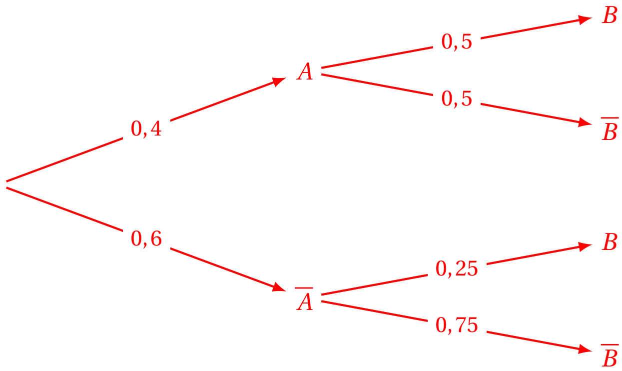
b. D'abord, on a :



Mais pour trouver $\mathbb{P}_A(B)$, on va utiliser les probabilités totales :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) \\
\Leftrightarrow &\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}(\overline{A}) \times \mathbb{P}_{\overline{A}}(B) \\
\Leftrightarrow &0,35 = 0,4 \times \mathbb{P}_A(B) + 0,6 \times 0,25 \\
\Leftrightarrow &\mathbb{P}_A(B) = \frac{0,35 - 0,6 \times 0,25}{0,4} = 0,5.
\end{aligned}$$

Ainsi :



2. À partir du premier arbre, d'après les probabilités totales :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(A) + \mathbb{P}(\overline{B})\mathbb{P}_{\overline{B}}(A)$$

$$\mathbb{P}(A) = 0{,}4 \times \frac{4}{7} + 0{,}6 \times \frac{3}{13}$$

$$\mathbb{P}(A) \approx 0{,}366.$$

EXERCICE 3 (5 POINTS)
Dans un tiroir de chaussettes, il n'y a que des chaussettes isolées, des rouges et des bleues. Dans le noir on en prend deux au hasard, l'une après l'autre (on supposera l'équiprobabilité).
Il y a 20 chaussettes en tout, dont 8 sont bleues.
On note B_1, B_2, R_1 et R_2 les évènements : « La première chaussette est bleue », « La deuxième chaussette est bleue », « La première est rouge » et « La deuxième est rouge ».

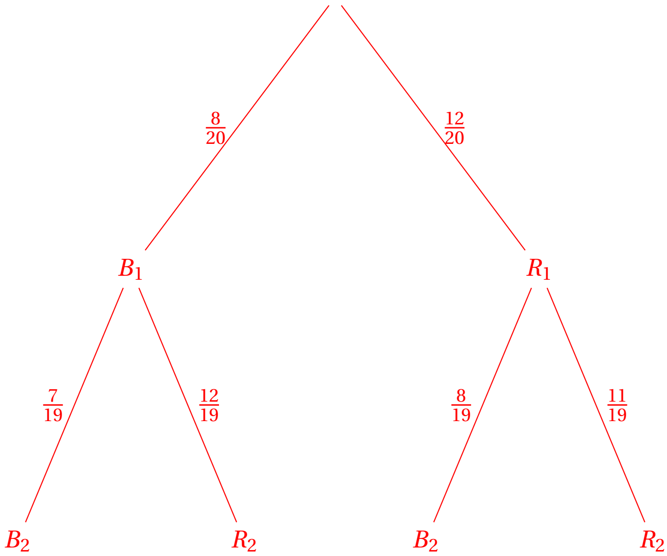
1. La première chaussette choisie est bleue. Quelle est la probabilité que la deuxième soit bleue ?

2. Les évènements B_1 et B_2 sont-ils indépendants ?

3. Les évènements B_1 et R_2 sont-ils indépendants ?

CORRECTION

1. Faisons un arbre :



Ainsi, on demande $\mathbb{P}_{B_1}(B_2) = \dfrac{7}{19}$.

2.

$$\mathbb{P}(B_1) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(B_2) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \frac{8}{20} \times \frac{7}{19} \neq \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(B_2)$$

Les évènements B_1 et B_2 ne sont donc pas indépendants.

3.

$$\mathbb{P}_{B_1}(R_2) = \frac{12}{19} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(R_2) = \frac{12}{20}$$

Ces probabilités sont différentes, donc B_1 et R_2 ne sont pas indépendants.