DEVOIR SURVEILLÉ 1

Calculatrice autorisée

Lundi 29 septembre 2025

EXERCICE 1 (8 POINTS)

Thomas ouvre un compte le 1er janvier 2019 et dépose 1 000 €. Il décide de ne jamais retirer d'argent sur ce compte qui est rémunéré au taux annuel de 2 % chaque 1er janvier.

De plus, chaque 1er janvier après l'ouverture du compte, Thomas dépose 500 € sur le compte. On note u_n le solde du compte le 1er janvier de l'année 2019+n. On a donc $u_0 = 1\,000$.

1. Quel est le solde du compte le 1er janvier 2020 ?

2. Expliquer pourquoi $u_{n+1} = 1{,}02u_n + 500$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

3. On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la suite $v_n = u_n + 25\,000$.

   a. Déterminer la nature de la suite (v_n) puis donner ses paramètres.

   b. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbf{N}$.

4. À l'aide de la calculatrice, conjecturer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

CORRECTION

1. On applique d'abord l'évolution de +2% sur u_0 puis on verse 500 :

$$u_1 = 1{,}02\,u_0 + 500 = 1{,}02 \times 1000 + 500 = 1020 + 500 = \boxed{1520}.$$

2. Partant de l'année $2019 + n$ à $2019 + n + 1$, le capital u_n produit 2% soit multiplication par 1.02, puis on crédite 500 :

$$u_{n+1} = 1{,}02\,u_n + 500 \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{N}.$$

C'est une suite définie par une relation du type $u_{n+1} = a\,u_n + b$ avec $a = 1{,}02$ et $b = 500$. (u_n) est une suite arithmético-géométrique.

3. **a.** Nature et paramètres.
Calculons v_{n+1} :

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 25\,000 = 1{,}02\,u_n + 500 + 25\,000.$$

Or $u_n = v_n - 25\,000$, donc

$$v_{n+1} = 1{,}02(v_n - 25\,000) + 500 + 25\,000 = 1{,}02\,v_n - 1{,}02 \times 25000 + 500 + 25000.$$

Ainsi,

$$v_{n+1} = 1{,}02\,v_n.$$

La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 1{,}02$ et de premier terme

$$v_0 = u_0 + 25\,000 = 1000 + 25000 = 26\,000.$$

b. Puisque $v_n = v_0 q^n$,

$$v_n = 26\,000 \times (1{,}02)^n.$$

En revenant à u_n,

$$\boxed{u_n = v_n - 25\,000 = 26\,000\,(1{,}02)^n - 25\,000.}$$

4. D'après le nuage de points de (u_n), $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty.}$

Exercice 2 (12 points)

Déterminer la limite des suites suivantes quand n tend vers $+\infty$.

1. $u_n = \dfrac{5}{n} + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$
2. $u_n = n^2 - 3$
3. $u_n = (n+2)(-3n^4+6n+2)$
4. $u_n = 6n\sqrt{n} - 12n^2$
5. $u_n = \dfrac{2+\frac{1}{n}}{3-\frac{1}{n}}$
6. $u_n = \dfrac{6n^2}{3n^2-4n-2}$

Correction

1. Les deux termes tendent vers 0 : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Donc par somme,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -3 = -3$ donc par somme,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.}$$

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} n+2 = +\infty$ mais $\lim\limits_{n\to+\infty} (-3n^4+6n+2)$ est une forme indéterminée.

$$-3n^4+6n+2 = n^4\left(-3+\frac{6}{n^3}+\frac{2}{n^4}\right)$$

Par produit, on a : $\lim_{n\to+\infty} -3n^4+6n+2 = -\infty$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty} \text{ par produit.}$$

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} 6n\sqrt{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 12n^2 = +\infty$. La différence est une forme indéterminée $+\infty - \infty$.
Soit $n \in \mathbf{N}$, factorisons u_n par n^2.

$$\begin{aligned} u_n &= 6n\sqrt{n} - 12n^2 \\ &= n^2\left(\frac{6n\sqrt{n}}{n^2} - \frac{12n^2}{n^2}\right) \\ &= n^2\left(\frac{6}{\sqrt{n}} - 12\right) \end{aligned}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{6}{\sqrt{n}} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{6}{\sqrt{n}} - 12\right) = -12$.
Par produit, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

5. $\lim\limits_{n\to+\infty} 2+\frac{1}{n} = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 3-\frac{1}{n} = 3$ donc par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{2}{3}$.

6. Nous sommes devant une forme indéterminée au dénominateur puis sur le quotient complet. Levons l'indétermination dès maintenant.

Soit $n \in \mathbf{N}$.

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{6n^2}{3n^2 - 4n - 2} \\ &= \frac{6n^2}{n^2\left(3 - \dfrac{4}{n} - \dfrac{2}{n^2}\right)} \\ &= \frac{6}{3 - \dfrac{4}{n} - \dfrac{2}{n^2}} \end{aligned}$$

Par quotient, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{6}{3} = 2$