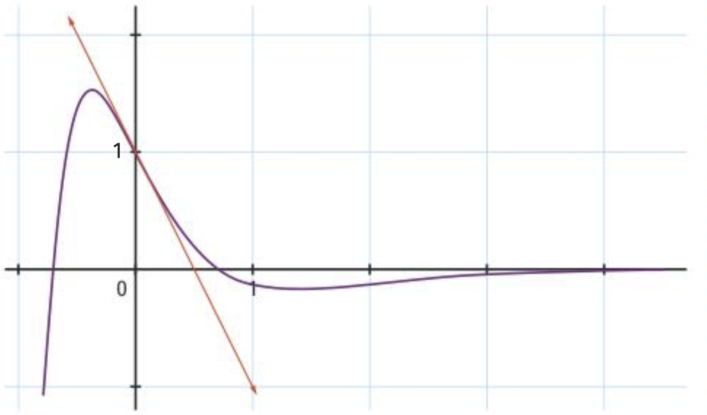
DEVOIR SURVEILLÉ 6

Calculatrice autorisée

Lundi 14 avril 2025

EXERCICE 1 (5 POINTS)

La courbe représentative d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbf{R}$ est donnée ci-dessous ainsi que sa tangente au point d'abscisse 0.



Pour chacune des affirmation suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.

1. $f'(0) > 0$

2. f est convexe sur $[0;2]$.

3. $f''(x) > 0$ sur $[-1;0]$

4. Si f est la dérivée d'une fonction g alors g est décroissante sur $[1;3]$.

5. Si f est la dérivée d'une fonction g alors g est convexe sur $[0;0{,}5]$.

CORRECTION

1. FAUX.
La pente de la tangente au point d'abscisse 0 est strictement négative donc $f'(0) < 0$.

2. VRAI.
Graphiquement, on voit bien que f est convexe sur $[0;2]$.

3. FAUX.
Sur $[-1;0]$, f est concave donc f'' est négative.

4. VRAI.
Sur $[1;3]$, $g' = f$ est négative donc g est décroissante.

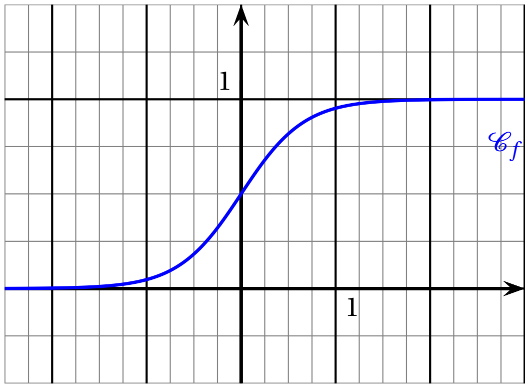
5. FAUX.
On sait que $f = g'$ et donc $f' = g''$. Ainsi, sur $[0;0{,}5]$, $g'' = f'$ est négative car f décroît : g est donc concave.

EXERCICE 2 (15 POINTS)

On considère la fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-3x}}.$$

On a tracé ci-dessous sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$.



1. Conjecturer la convexité de f sur **R**.

2. Étudier les variations de f sur **R**.

3. On admet que f'' est définie sur **R** par :

$$f''(x) = \frac{9\mathrm{e}^{-3x}\left(\mathrm{e}^{-3x}-1\right)}{\left(1+\mathrm{e}^{-3x}\right)^3}.$$

Donner, en justifiant, la convexité de f.

4. **a.** Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f.

b. Déterminer la limite en $-\infty$ de la fonction f.

5. **a.** Montrer qu'il existe une unique solution α à l'équation $f(x) = 0{,}99$ sur **R**.

b. Déterminer la valeur exacte de α.

6. **(bonus)** Déterminer la convexité de la fonction g définie sur **R** par :

$$g(x) = \ln\left(f(x)\right).$$

Correction

1. La fonction semble être convexe sur $]-\infty\,;\,0]$ et concave sur $[0\,;\,+\infty[$.

2. En posant $u(x) = 1+\mathrm{e}^{-3x}$, on a pour tout réel $u'(x) = -3\mathrm{e}^{-3x}$.

De $f(x) = \dfrac{1}{u(x)}$, on a donc $f'(x) = -\dfrac{u'(x)}{u(x)^2} = -\dfrac{-3\mathrm{e}^{-3x}}{\left(1+\mathrm{e}^{-3x}\right)^2} = \dfrac{3\mathrm{e}^{-3x}}{\left(1+\mathrm{e}^{-3x}\right)^2}$.

On a pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\mathrm{e}^{-3x} > 0$, donc $1+\mathrm{e}^{-3x} > 1 > 0$ et $\left(1+\mathrm{e}^{-3x}\right)^2 > 0$: tous les termes de la dérivée sont supérieurs à zéro ; on a donc $f'(x) > 0$, sur **R**. La fonction f est strictement croissante sur **R**.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$3\mathrm{e}^{-3x}$	$+$
$\left(1+\mathrm{e}^{-3x}\right)^2$	$+$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$

3. Comme $9\mathrm{e}^{-3x} > 0$ et $\left(1+\mathrm{e}^{-3x}\right)^3 > 0$, le signe de $f''(x)$ est celui de $\mathrm{e}^{-3x}-1$:

- $\mathrm{e}^{-3x}-1=0 \iff \mathrm{e}^{-3x}=1 \iff -3x=\ln 1=0 \iff x=0$;
- $\mathrm{e}^{-3x}-1>0 \iff \mathrm{e}^{-3x}>1 \iff -3x>\ln 1=0 \iff x<0$;
- $\mathrm{e}^{-3x}-1<0 \iff \mathrm{e}^{-3x}<1 \iff -3x<\ln 1=0 \iff x>0$;

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$9\mathrm{e}^{-3x}$		$+$		$+$	
$\mathrm{e}^{-3x}-1$		$+$	0	$-$	
$\left(1+\mathrm{e}^{-3x}\right)^3$		$+$		$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

f est convexe sur $]-\infty\,;0]$ et concave sur $[0\,;+\infty[$.

4. **a.** Avec $X=-3x$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} -3x=-\infty$, d'où $\lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X=0$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\mathrm{e}^{-3x}=1$ et enfin $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{1}{1}=1$.

b. On a $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-3x}=+\infty$, puis $\lim\limits_{x\to-\infty} 1+\mathrm{e}^{-3x}=+\infty$ et enfin $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-3x}}=0$.

5. **a.** Utiliser le TVI.

b. On a $f(x)=0,99 \iff \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-3x}}=0,99 \iff 1=0,99\left(1+\mathrm{e}^{-3x}\right) \iff 1=0,99+0,99\mathrm{e}^{-3x} \iff 0,01=0,99\mathrm{e}^{-3x} \iff \dfrac{0,01}{0,99}=\mathrm{e}^{-3x} \iff \dfrac{1}{99}=\mathrm{e}^{-3x}$.
Par croissance de la fonction logarithme népérien :
$\ln\left(\dfrac{1}{99}\right)=\ln\left(\mathrm{e}^{-3x}\right) \iff \ln 1-\ln 99=-3x \iff -\ln 99=-3x \iff x=\dfrac{\ln 99}{3}$ (valeur approchée à la calculatrice 1,532).

6. Graphiquement, on observe déjà que g est concave sur $\mathbf{R}$.
Ensuite, g est deux fois dérivable sur $\mathbf{R}$ comme composée. Soit $x\in\mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{f'(x)}{f(x)} \text{ comme } g \text{ composée logarithmique}\\ &= \frac{\dfrac{3\mathrm{e}^{-3x}}{\left(1+\mathrm{e}^{-3x}\right)^2}}{\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-3x}}}\\ &= \frac{3\mathrm{e}^{-3x}}{1+\mathrm{e}^{-3x}} \end{aligned}$$

On dérive à nouveau (comme quotient $\dfrac{u}{v}$) :

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{v(x)^2}\\ &= \frac{-9\mathrm{e}^{-3x}(1+\mathrm{e}^{-3x})-(-3\mathrm{e}^{-3x})3\mathrm{e}^{-3x}}{\left(1+\mathrm{e}^{-3x}\right)^2}\\ &= \frac{\mathrm{e}^{-3x}\left(-9-9\mathrm{e}^{-3x}+9\mathrm{e}^{-3x}\right)}{\left(1+\mathrm{e}^{-3x}\right)^2}\\ &= \frac{-9\mathrm{e}^{-3x}}{\left(1+\mathrm{e}^{-3x}\right)^2} \end{aligned}$$

g est concave sur $\mathbf{R}$ car $g''(x)$ est du signe de -9, tous les autres facteurs étant strictement positifs.