DEVOIR SURVEILLÉ 5

Calculatrice autorisée

Lundi 10 mars 2025

EXERCICE 1 (6 POINTS)

Résoudre les équations suivantes d'inconnue un réel x. Donner la valeur exacte de la solution lorsqu'elle existe.

1. $e^{2x} = 1$ **2.** $2e^{x-1} = -6$ **3.** $e^{-2x+3} = e$ **4.** $5e^x - 4 = -3e^x + 2$

CORRECTION

1.

$$\begin{aligned} e^{2x} &= 1 \\ \Leftrightarrow \ln\left(e^{2x}\right) &= \ln(1) \\ \Leftrightarrow 2x &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 0 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} 2e^{x-1} &= -6 \\ \Leftrightarrow e^{x-1} &= -3 \end{aligned}$$

Il n'y a donc pas de solution réelle puisque l'exponentielle est strictement positive.

3.

$$\begin{aligned} e^{-2x+3} &= e \\ \Leftrightarrow \ln\left(e^{-2x+3}\right) &= \ln(e) \\ \Leftrightarrow -2x+3 &= 1 \\ \Leftrightarrow -2x &= -2 \\ \Leftrightarrow x &= 1 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} 5e^x - 4 &= -3e^x + 2 \\ \Leftrightarrow 8e^x &= 6 \\ \Leftrightarrow e^x &= \frac{6}{8} \\ \Leftrightarrow \ln\left(e^x\right) &= \ln\left(\frac{3}{4}\right) \\ \Leftrightarrow x &= \ln\left(\frac{3}{4}\right) \end{aligned}$$

EXERCICE 2 (6 POINTS)

Déterminer la limite des fonctions suivantes en a.

1. f est la fonction définie pour tout nombre réel $x > 0$ par :

$$f(x) = \left(e^x - 1\right)\left(2 - \ln(x)\right) \quad \text{et } a = +\infty.$$

2. f est la fonction définie pour tout nombre réel $x > 0$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(x) - 1}{x} \quad \text{et } a = 0.$$

3. f est la fonction définie pour tout nombre réel $x > 0$ par :

$$f(x) = \frac{4+\ln(x)}{x} \quad \text{et } a = +\infty.$$

CORRECTION

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x - 1 = +\infty$ par somme et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2-\ln(x) = -\infty$ par somme ($\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$).
Ainsi, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) - 1 = -\infty$.
Ainsi, par quotient, $\lim\limits_{x\to 0} = -\infty$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} 4+\ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ donc nous avons une forme indéterminée.
Seulement, $f(x) = \frac{4}{x} + \frac{\ln(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ par croissances comparées.
Ainsi, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

EXERCICE 3 (8 POINTS)

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1+\ln(x)}{x^2}.$$

1. Démontrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{-1-2\ln(x)}{x^3}$.

2. **a.** Résoudre dans $]0;+\infty[$ l'inéquation $-1-2\ln(x) > 0$.

b. En déduire le tableau de variations de f.

3. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

a. Démontrer que $\mathscr{C}$ admet un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.

b. En déduire le tableau de signe de f.

CORRECTION

1. En dérivant $f(x)$ comme un quotient $\dfrac{u(x)}{v(x)}$, on a pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v(x)^2} \\ &= \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x \times (1+\ln(x))}{\left(x^2\right)^2} \\ &= \frac{x - 2x - 2x\ln(x)}{x^4} \\ &= \frac{1-2-2\ln(x)}{x^3} \\ &= \frac{-1-2\ln(x)}{x^3} \end{aligned}$$

2. **a.** N'oublions pas que $x > 0$ sinon $\ln(x)$ n'est pas défini.

$$\begin{aligned} & -1-2\ln(x) > 0 \\ \Leftrightarrow\ & -2\ln(x) > 1 \\ \Leftrightarrow\ & \ln(x) < \frac{1}{-2} \\ \Leftrightarrow\ & \ln(x) < -\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow\ & \mathrm{e}^{\ln(x} < \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \text{ car } x \mapsto \mathrm{e}^x \text{ est strictement croissante sur } \mathbf{R} \\ \Leftrightarrow\ & x < \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Les solutions dans $]0\,;+\infty[$ de l'inéquation $-1-2\ln(x) > 0$ forment l'intervalle $\left]0\,;\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right[$.

b. Nous avons donc le tableau de variations de f grâce à l'étude du signe de f'.

x	0		$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$-1-2\ln(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
x^3	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\Vert$	$\nearrow$		$\searrow$	

3. $\mathscr{C}$ admet un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses est équivalent à : il existe $x > 0$ tel que $f(x) = 0$.

Nous voulons donc utiliser le TVI sur $\left]0\,;\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right[$ et $\left]\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\,;+\infty\right[$.

Constatons que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0^+$ par croissances comparées, $f\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right) \approx 1{,}36$ et $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$ par quotient.

x	0		$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$f(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$\approx 1{,}36$	$\searrow$	0^+

Ainsi, f étant continue sur $]0\,;+\infty[$, il existe une unique solution à $f(x) = 0$ sur $\left]0\,;\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right[$ et aucune sur $\left]\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\,;+\infty\right[$.

Enfin,

$$\begin{aligned} & f(x) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1+\ln(x)}{x^2} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 1+\ln(x) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & ln(x) = -1 \\ \Leftrightarrow\ & x = \mathrm{e}^{-1} \end{aligned}$$

Les coordonnées du point d'intersection sont $\left(\mathrm{e}^{-1};0\right)$.

4. On a donc :

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	