DEVOIR SURVEILLÉ 4

Calculatrice autorisée

Lundi 10 février 2025

EXERCICE 1 (8 POINTS)

Soit g la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = x^3 + x - 1.$$

1. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution x_0 dans l'intervalle $[0\,;1]$.

2. Montrer que x_0 est l'unique solution de $g(x) = 0$ dans $[0\,;+\infty[$.

3. À l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée à 10^{-2} de x_0.

CORRECTION

1.
- La fonction g est continue sur $[0\,;1]$ car g est dérivable sur $\mathbf{R}$.
- $g(0) = -1$ et $g(1) = 1$ donc $g(0) \leqslant 0 \leqslant g(1)$.
- g est strictement croissante sur $\mathbf{R}$ car $g'(x) = 3x^2 + 1 > 0$.

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, g admet une unique solution x_0 dans $[0\,;1]$ à $g(x) = 0$.

2. g est strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$ et son minimum sur cet intervalle est $g(1) = 1$ donc g ne s'annule pas sur $[1\,;+\infty[$ et par la question précédente, x_0 est l'unique solution de $g(x) = 0$ dans $[0\,;+\infty[$.

3. Une lecture graphique sur la calculatrice nous donne $x_0 \approx 0{,}68$.

EXERCICE 2 (8 POINTS)

La population, en dizaine de milliers d'habitants, à l'année $(2015+x)$, d'une ville nouvelle est modélisée pour les cinq premières années par la fonction f définie sur $[0\,;5]$ par :

$$f(x) = \frac{2x^3+1}{x^3+1}.$$

1. Donner l'expression de f' sur $[0\,;5]$.

2. En déduire les variations de f sur $[0\,;5]$.

3. Montrer que pour la période concernée, la population de cette ville atteindra 18 500 habitants.

bonus 4. Donner la date au cours de laquelle le seuil des 18 500 habitants a été atteint.

CORRECTION

1. $\forall x \in [0\,;5]\,, f'(x) = \dfrac{(6x^2)(x^3+1)-(3x^2)(2x^3+1)}{(x^3+1)^2} = \dfrac{6x^5+6x^2-6x^5-3x^2}{(x^3+1)^2} = \dfrac{3x^2}{(x^3+1)^2}$

2. Le quotient $\dfrac{3x^2}{(x^3+1)^2}$ est strictement positif sur $]0\,;5]$ car c'est un carré.

Ainsi, f est strictement croissante sur $[0\,;5]$.

3.
- f est continue sur $[0\,;5]$ car dérivable.
- $1 = f(0) \leqslant 1{,}85 \leqslant f(5) \approx 1{,}99$.
- f est strictement croissante sur $[0\,;5]$ d'après la question précédente.

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, f admet une unique solution x_0 dans $[0\,;5]$ à $f(x) = 1{,}85$.

Pour la période concernée, la population de cette ville atteindra 18 500 habitants.

4. Par lecture graphique sur la calculatrice, $x_0 \approx 1{,}7828$.

Nous sommes ainsi en 2016, année bissextile. Pour la date exacte, calculons $0{,}7828 \times 365$ pour connaître le nombre de jours écoulés puis le 1er janvier 2016. $0{,}7828 \times 366 = 286{,}505$ donc cela fait 286 jours après le 1er janvier 2016, c'est-à-dire, le 13 octobre 2016.

Exercice 3 (6 points)
Démontrer que l'équation $x^3-3x^2-1=0$ admet une unique solution dans $\mathbf{R}$ et encadrer celle-ci par des entiers consécutifs.
Indication : On pourra commencer par étudier les variations de f d'expression $f(x)=x^3-3x^2-1$.

Correction
f d'expression $f(x)=x^3-3x^2-1$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et :

$$\forall x\in\mathbf{R},\, f'(x)=3x^2-6x=(3x-6)x.$$

On peut donner le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$3x-6$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

f admet une maximum local en 0 et on a $f(0)=-1$. Ainsi, d'après le tableau, f ne s'annule que sur $[2;+\infty[$.
Une utilisation du TVI sur cet intervalle nous permet d'affirmer qu'il existe une unique solution x_0 à $f(x)=0$ sur $[2;+\infty]$ et donc sur $\mathbf{R}$.
Par balayage sur la calculatrice, on se rend compte que $3\leqslant x_0\leqslant 4$.