DEVOIR SURVEILLÉ 3

Calculatrice autorisée

Mardi 7 janvier 2025

EXERCICE 1 (5 POINTS)

Déterminer les limites suivantes.

1. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{6x^2-7x+2}{3-x}$ **2.** $\displaystyle\lim_{x\to2} \frac{6x^2-7x+2}{3-x}$ **3.** $\displaystyle\lim_{x\to3^+} \frac{6x^2-7x+2}{3-x}$

CORRECTION

1. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} 6x^2-7x+2=+\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} 3-x=+\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{6x^2-7x+2}{3-x}$ est une forme indéterminée.

On factorise par le coefficient dominant au numérateur et dénominateur :

$$\begin{aligned}\frac{6x^2-7x+2}{3-x}&=\frac{x^2(6-\frac{7}{x}+\frac{2}{x^2}}{x(\frac{3}{x}-1)}\\&=x\times\frac{6-\frac{7}{x}+\frac{2}{x^2}}{\frac{3}{x}-1}\end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{6-\frac{7}{x}+\frac{2}{x^2}}{\frac{3}{x}-1}=-6$ donc par produit :

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{6x^2-7x+2}{3-x}=+\infty.$

2. $\displaystyle\lim_{x\to2} \frac{6x^2-7x+2}{3-x}=\frac{6\times2^2-7\times2+2}{3-2}=12$

3. $\displaystyle\lim_{x\to3^+} 6x^2-7x+2=6\times3^2-7\times3+2=35$ et $\displaystyle\lim_{x\to3^+} 3-x=0^-$ donc par quotient :

$\displaystyle\lim_{x\to3^+} \frac{6x^2-7x+2}{3-x}=-\infty.$

EXERCICE 2 (15 POINTS)

Pour diagnostiquer une maladie chez un patient, un médecin se base sur un ensemble de symptômes. Son expérience lui permet de poser son diagnostic, mais il peut se tromper.

En pic d'épidémie de grippe, M. Condriac vient voir son médecin. Il souffre de courbatures (C), maux de tête (T) et de fièvre (F). Le médecin hésite entre une vraie grippe (G) ou un état grippal ($\overline{G}$)(dû à un virus différent de celui de la grippe). Le médecin a constaté que 95% des grippés souffrent conjointement des trois symptômes C, T, F, alors que parmi les malades en état grippal seuls 35% présentent à la fois les trois symptômes C, T, F.

Le médecin diagnostique une grippe pour M. Condriac.

Ce problème vise à calculer, dans ce contexte, la probabilité que le médecin fasse un faux diagnostic.

1. On considère les statistiques du médecin comme des probabilités d'évènements.

On note G l'évènement « Le patient a la grippe », CTF l'évènement « Le patient présente les trois symptômes ». On notera aussi p la probabilité que le patient a la grippe.

Déterminer $\mathbb{P}_G(CTF)$ et $\mathbb{P}_{\overline{G}}(CTF)$ et représenter la situation par un arbre de probabilité.

2. Calculer, en fonction de p, $\mathbb{P}(CTF)$ puis $\mathbb{P}_{CTF}(G)$ et $\mathbb{P}_{CTF}(\overline{G})$.

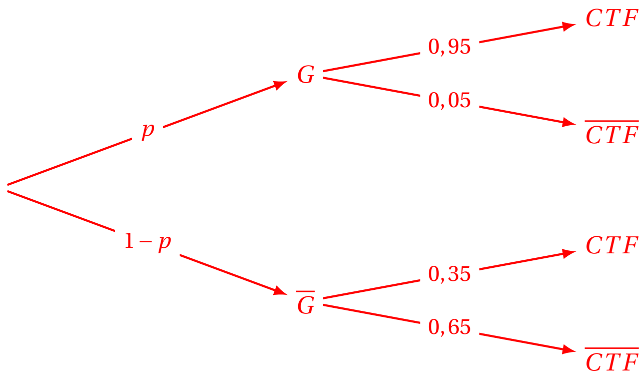
3. Durant le pic d'épidémie, on estime que 70% des patients du médecin ont la grippe. Pour simplifier, on suppose que tous les autres présentent un état grippal.

Estimer alors la probabilité d'erreur du médecin par rapport au diagnostic réalisé. Arrondir au millième.

4. En période de fin d'épidémie, le pourcentage de patients du médecin qui ont la grippe descend à 20%. Comment évolue le risque d'erreur du médecin ?

CORRECTION

1. D'après l'énoncé, $\mathbb{P}_G(CTF) = 0{,}95$ et $\mathbb{P}_{\overline{G}}(CTF) = 0{,}35$.



2. D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\mathbb{P}(CTF) = \mathbb{P}(G \cap CTF) + \mathbb{P}(\overline{G} \cap CTF) = 0{,}95p + 0{,}35(1-p) = 0{,}6p + 0{,}35.$$

Enfin, par la formule de Bayes (ou la définition d'une probabilité conditionnelle) :

$$\mathbb{P}_{CTF}(G) = \frac{\mathbb{P}(CTF \cap G)}{\mathbb{P}(CTF)} = \frac{0{,}95p}{0{,}6p + 0{,}35}$$

et

$$\mathbb{P}_{CTF}(\overline{G}) = \frac{\mathbb{P}(CTF \cap \overline{G})}{\mathbb{P}(CTF)} = \frac{0{,}35(1-p)}{0{,}6p + 0{,}35}.$$

3. Ici, $p = 0{,}7$. Se tromper de diagnostic est de probabilité $\mathbb{P}_{CTF}(\overline{G})$ puisqu'on sait que M. Condriac a CTF et le médecin pense à une grippe.

$$\mathbb{P}_{CTF}(\overline{G}) = \frac{0{,}35(1-0{,}7)}{0{,}6 \times 0{,}7 + 0{,}35} \approx 0{,}136$$

4. Si $p = 0{,}2$ alors $\mathbb{P}_{CTF}(\overline{G}) = \dfrac{0{,}35(1-0{,}2)}{0{,}6 \times 0{,}2 + 0{,}35} \approx 0{,}596$. Le risque d'erreur augmente fortement quand p diminue.