DEVOIR SURVEILLÉ 1

Calculatrice autorisée

Mardi 15 octobre 2024

EXERCICE 1 (8 POINTS)

Thomas ouvre un compte le 1er janvier 2019 et dépose 1 000 €. Il décide de ne jamais retirer d'argent sur ce compte qui est rémunéré au taux annuel de 2 % chaque 1er janvier.
De plus, chaque 1er janvier après l'ouverture du compte, Thomas dépose 500 € sur le compte. On note u_n le solde du compte le 1er janvier de l'année 2019+n. On a donc $u_0 = 1\,000$.

1. Quel est le solde du compte le 1er janvier 2020 ?

2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n pour tout $n \in \mathbf{N}$. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

3. On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la suite $v_n = u_n + 25\,000$.

- **a.** Déterminer la nature de la suite (v_n) puis donner ses paramètres.
- **b.** Exprimer v_n puis u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbf{N}$.

4. Quelle est la limite de (u_n) quand n tend vers $+\infty$?

CORRECTION

1. $u_1 = 1{,}02 \times u_0 + 500 = 1{,}02 \times 1000 + 500 = 1\,520$ Il y a 1520 € sur le compte le 1er janvier 2020.

2. $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = 1{,}02u_n + 500$ donc (u_n) est une suite arithmético-géométrique de paramètres $a = 1{,}02$, $b = 500$ et $u_0 = 1000$.

3. **a.** Soit $n \in \mathbf{N}$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 25000 \\ &= 1{,}02u_n + 500 + 25000 \\ &= 1{,}02u_n + 25500 \\ &= 1{,}02 \times (v_n - 25000) + 25500 \\ &= 1{,}02v_n \end{aligned}$$

(v_n) vérifie la relation de récurrence d'une suite géométrique de raison $q = 1{,}02$.
Son premier terme est $v_0 = u_0 + 25000 = 26000$.

b. Par la question précédente,

$$\forall n \in \mathbf{N}, v_n = v_0 q^n = 26\,000 \times 1{,}02^n.$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_n = v_n - 25000 = 26\,000 \times 1{,}02^n - 25\,000.$$

4. $1{,}02 > 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} 1{,}02^n = +\infty$. Ainsi, par somme, $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} 26\,000 \times 1{,}02^n - 25\,000 = +\infty$

EXERCICE 2 (8 POINTS)

Déterminer la limite des suites suivantes quand n tend vers $+\infty$.

1. $u_n = \dfrac{5}{n} + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

2. $u_n = 1{,}04^n - 0{,}87^n$

3. $u_n = n^2 - 3$

4. $u_n = 6n\sqrt{n} - 12n^2$

5. $u_n = \dfrac{2 + \frac{1}{n}}{3 - \frac{1}{n}}$

6. $u_n = \dfrac{6n^2}{3n^2 - 4n - 2}$

CORRECTION

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5}{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty$ donc par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
2. $1{,}04 > 1$ et $-1 < 0{,}87 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1{,}04^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}87^n = 0$. Par différence, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 - 3 = +\infty$.
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} 6n\sqrt{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 12n^2 = +\infty$. La différence est une forme indéterminée $+\infty - \infty$.
   Soit $n \in \mathbf{N}$, factorisons u_n par n^2.
$$\begin{aligned} u_n &= 6n\sqrt{n} - 12n^2 \\ &= n^2\left(\frac{6n\sqrt{n}}{n^2} - \frac{12n^2}{n^2}\right) \\ &= n^2\left(\frac{6}{\sqrt{n}} - 12\right) \end{aligned}$$
   $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{6}{\sqrt{n}} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{6}{\sqrt{n}} - 12\right) = -12$.
   Par produit, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
5. $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 + \frac{1}{n} = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 - \frac{1}{n} = 3$ donc par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{2}{3}$.
6. Nous sommes devant une forme indéterminée au dénominateur puis sur le quotient complet. Levons l'indétermination dès maintenant.
   Soit $n \in \mathbf{N}$.
$$\begin{aligned} u_n &= \frac{6n^2}{3n^2 - 4n - 2} \\ &= \frac{6n^2}{n^2\left(3 - \frac{4}{n} - \frac{2}{n^2}\right)} \\ &= \frac{6}{3 - \frac{4}{n} - \frac{2}{n^2}} \end{aligned}$$
   Par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{6}{3} = 2$.

EXERCICE 3 (4 POINTS)

On considère la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbf{N}$, par $u_n = \dfrac{1 + 2\cos(5n)}{n+1}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$:
$$-\frac{1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{3}{n+1}.$$
2. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

CORRECTION

1. Soit $n \in \mathbf{N}$.
$$\begin{aligned} & -1 \leqslant \cos(5n \leqslant 1 \\ \Leftrightarrow & -2 \leqslant 2\cos(5n) \leqslant 2 \\ \Leftrightarrow & -1 \leqslant 1 + 2\cos(5n) \leqslant 3 \\ \Leftrightarrow & \frac{-1}{n+1} \leqslant \frac{1 + 2\cos(5n)}{n+1} \leqslant \frac{3}{n+1} \end{aligned}$$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{n+1} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n+1} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.