7

DÉRIVATION

Résumé

Ce chapitre est dans sa grande majorité constitué de rappels de l'année précédente. Cependant, nous viendrons ajouter la notion de fonction composée ainsi que de convexité.

Attention

Dans toute la suite, I désignera un intervalle ouvert et f, g, u ou v des fonctions définies sur I.

1 Rappels

Propriétés | Dérivées usuelles

On donne, dans le tableau ci-contre, les dérivées de fonctions usuelles ainsi que leurs ensembles de définition et dérivation. Ici, $n \in \mathbf{N}^*$ et $c \in \mathbf{R}$.

$f(x)$	D_f	$f'(x)$	$D_{f'}$
c	$\mathbf{R}$	0	$\mathbf{R}$
x^n	$\mathbf{R}$	nx^{n-1}	$\mathbf{R}$
$\sqrt{x}$	$[0;+\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\mathbf{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbf{R}^*$
$\frac{1}{x^n}$	$\mathbf{R}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbf{R}^*$
e^x	$\mathbf{R}$	e^x	$\mathbf{R}$
$\ln(x)$	$]0;+\infty[$	$\frac{1}{x}$	$]0;+\infty[$
$\cos(x)$	$\mathbf{R}$	$-\sin(x)$	$\mathbf{R}$
$\sin(x)$	$\mathbf{R}$	$\cos(x)$	$\mathbf{R}$

Propriétés | Opérations algébriques

Soient u, v deux fonctions dérivables sur I et $\lambda \in \mathbf{R}$ une constante réelle.

- $(u+v)' = u' + v'$
- $(\lambda \times u)' = \lambda u'$
- $(u \times v)' = u'v + u'v$
- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ (si $v(x) \neq 0$ sur I).

2 Composition

Définition | Fonction composée

Soient f une fonction définie sur I et g une fonction définie sur $f(I)$, l'ensemble des images $f(x)$ pour tout $x \in I$.
On peut construire une fonction $g \circ f$, appelée **fonction composée de f par g**, définie sur I par :

$$\forall x \in I, \qquad g \circ f(x) = g\big(f(x)\big).$$

Exemples

- Soit f définie sur $\mathbf{R}_+$ par $f(x) = 2 + \sqrt{x}$.

$$\forall x \in [2;+\infty[, \qquad g \circ f(x) = g\big(f(x)\big) = g\left(2+\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2+\sqrt{x}}.$$

- Soit f définie sur $\mathbf{R}$ par $3 - x^2$ et g définie sur $\mathbf{R}$ par $2x^2$.

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad g \circ f(x) = g\left(3-x^2\right) = 2\left(3-x^2\right)^2.$$

Théorème | Dérivation d'une composée

Soient u une fonction dérivable sur I et v une fonction dérivable sur $u(I)$.
$v \circ u$ est dérivable sur I et on a :

$$(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u).$$

Propriétés | Cas particuliers

Soient u une fonction dérivable sur I, $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}^*$.

- $f(x) = u(ax+b) \Rightarrow f'(x) = a \times u'(ax+b)$
- $(u^n)' = nu'u^{n-1}$
- $u > 0$ sur $I \Rightarrow \sqrt{u}' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
- $\exp(u)' = u' \exp(u)$.
- $u > 0$ sur $I \Rightarrow \ln(u)' = \dfrac{u'}{u}$

Exemples

- Soit f définie par $f(x) = \sqrt{4x-8}$.

  Pour tout $x \in]2;+\infty[$, $f'(x) = 4 \times \dfrac{1}{2\sqrt{4x-8}} = \dfrac{2}{\sqrt{4x-8}}$.
- Si $f(x) = \mathrm{e}^{-6x+7}$, alors $f'(x) = -6\mathrm{e}^{-6x+7}$.
- Si $f(x) = \ln\left(4+2x^2\right)$ alors $f'(x) = \dfrac{4x}{4+2x^2}$.
- On peut combiner composée et produit/quotient pour dériver des fonctions plus complexes telles que f d'expression :

$$f(x) = (x+4)^2 \times (-7x+1)^3 = u(x)v(x).$$

On pose $u(x) = (x+4)^2$ de sorte que $u'(x) = 2(x+4) = 2x+8$ et $v(x) = (-7x+1)^3$ où $v'(x) = -7 \times 3(-7x+1)^2$.

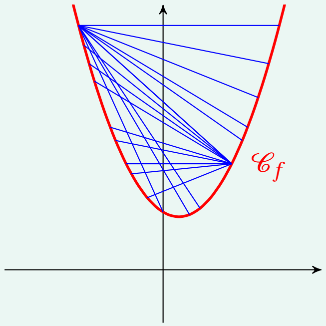
Ainsi :

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + v'(x)u(x) \\ &= (2x+8)(-7x+1)^3 - 7 \times 3(-7x+1)^2(x+4)^2 \\ &= (x+4)(-7x+1)^2\left[2(-7x+1) - 21(x+4)\right] \\ &= (x+4)(-7x+1)^2(-35x-82). \end{aligned}$$

3 Convexité

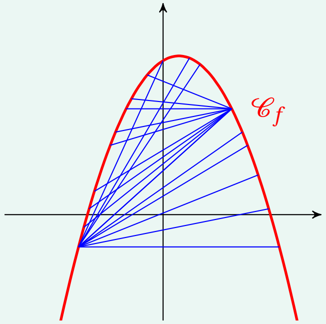
Définition | Fonction convexe

Soientt f une fonction définie sur un intervalle I et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.
f est dite **convexe** sur I si :
Pour tout $A, B \in \mathscr{C}_f$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est "en dessous" du segment $[AB]$.



Définition | Fonction concave

Soientt f une fonction définie sur un intervalle I et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.
f est dite **concave** sur I si :
Pour tout $A, B \in \mathscr{C}_f$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est "au dessus" du segment $[AB]$.



Propriétés

- La somme de deux fonctions convexes sur I (resp. concaves sur I) est convexe sur I (resp. concave sur I).
- Le produit d'une fonction convexe sur I (resp. concave sur I) par un nombre réel **strictement positif** est convexe sur I (resp. concave sur I).
- Le produit d'une fonction convexe sur I (resp. concave sur I) par un nombre réel **strictement négatif** est concave sur I (resp. convexe sur I).

Théorème | Utilisation de la dérivée seconde

Soit f une fonction **dérivable deux fois** sur I.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

f est convexe sur I ;
$\Leftrightarrow$ f' est croissante sur I ;
$\Leftrightarrow$ $f'' \geqslant 0$ sur I ;
$\Leftrightarrow$ $\mathscr{C}_f$ est au dessus de ses tangentes.

Exemples

- La fonction **ex**ponentielle est conv**exe** car $\exp'' = \exp > 0$.
- Toute parabole ouverte est convexe. En effet, ce sont les représentations graphiques d'expressions $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $a > 0$.

  f est deux fois dérivable : $\forall x \in \mathbf{R}, f'(x) = 2a(x-\alpha)$ donc $f''(x) = 2a > 0$.

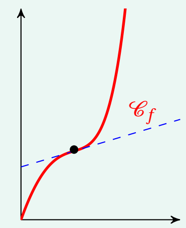
Exercice

Soit f définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

1. Démontrer que f est convexe sur $\mathbf{R}_+^*$.
2. Déterminer une équation de la tangente $T_1(f)$.
3. En déduire que $\forall x > 0, x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$.

Définition | Point d'inflexion

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
$A \in \mathscr{C}_f$ est un point d'inflexion si en ce point $\mathscr{C}_f$ traverse la tangente.



Théorème

Soient f définie sur I et $a \in I$.

- Le point $(a; f(a))$ est un point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$ si, et seulement si, la convexité de f change en a.
- Si de plus, f est deux fois dérivable sur I, alors le point $(a; f(a))$ est un point d'inflexion si, et seulement si, f'' s'annule et change de signe en a.

Démonstration. Admis. □

Exercice

Déterminer les éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^3 - 21x^2 + 19$.