10

Intégration

Résumé

La théorie de l'intégration est riche. Elle est tellement riche que ses applications se retrouvent dans presque tous les pans de l'analyse : calcul d'aires, détermination de primitives, probabilité, transformations de Fourier et Laplace...

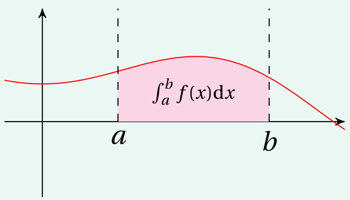
1 Intégration géométrique

Attention

Dans toute la section, f désignera une fonction **continue** définie sur un intervalle **compact** de $\mathbf{R}$, c'est-à-dire, une fonction suffisamment régulière définie sur un $[a;b]$ où $a<b$ sont des réels.

Définition | Intégrale d'une fonction positive sur un intervalle

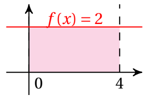
Supposons que f est **positive**.
L'intégrale de f entre a et b est le nombre réel **positif** correspondant à l'**aire sous la courbe** de f entre $x=a$ et $x=b$.



On la note :

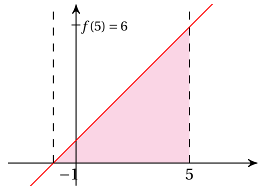
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Exemples ▶ On peut calculer $\int_0^4 2\mathrm{d}x$ qui est l'aire sous la courbe de la fonction constante égale à 2 entre $x=0$ et $x=4$.



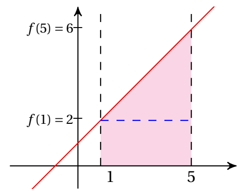
Elle correspond à l'aire d'un rectangle de longueur $4=4-0$ et de largeur 2, c'est-à-dire, $\int_0^4 2\mathrm{d}x=8$.

▶ Pour $\int_{-1}^5 (x+1)\mathrm{d}x$, nous avons à faire à l'aide d'un triangle de base $6=5-(-1)$ et de hauteur 6.



On obtient donc $\int_{-1}^5 (x+1)\mathrm{d}x=\dfrac{6\times6}{2}=18$.

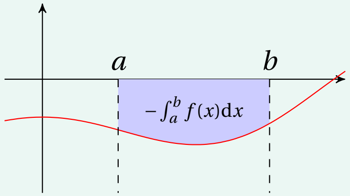
▶ Pour $\int_1^5 (x+1)\mathrm{d}x$, cette fois ci, c'est un trapèze qui nous intéresse. On peut calculer son aire en considérant le rectangle et le triangle mis en évidence.



$$\int_2^5 (x+1)\mathrm{d}x=4\times2+\frac{4\times4}{2}=8+8=16$$

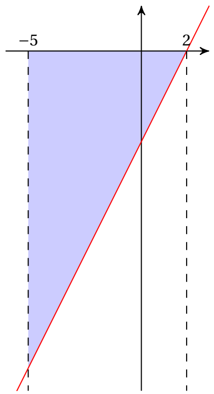
Définition | Intégrale d'une fonction négative sur un intervalle

Supposons que f est **négative**.
L'intégrale de f entre a et b est le nombre réel **négatif** correspondant à l'**aire algébrique sous la courbe** de f entre $x = a$ et $x = b$.



Cette aire est l'opposée de l'**aire absolue** obtenue par un calcul d'aire classique et représentée au dessus.

Exemple $\int_{-5}^{2} (2x-4)\mathrm{d}x = -49$ car l'aire absolue sous la courbe est celle d'un triangle de base 7 et de hauteur $(2 \times 2 - 4) - (2 \times (-5) - 4) = 14$ donc d'aire $\dfrac{7 \times 14}{2} = 49$ mais le triangle est sous l'axe des abscisses : la fonction est négative sur $[-5;2]$.



Propriétés

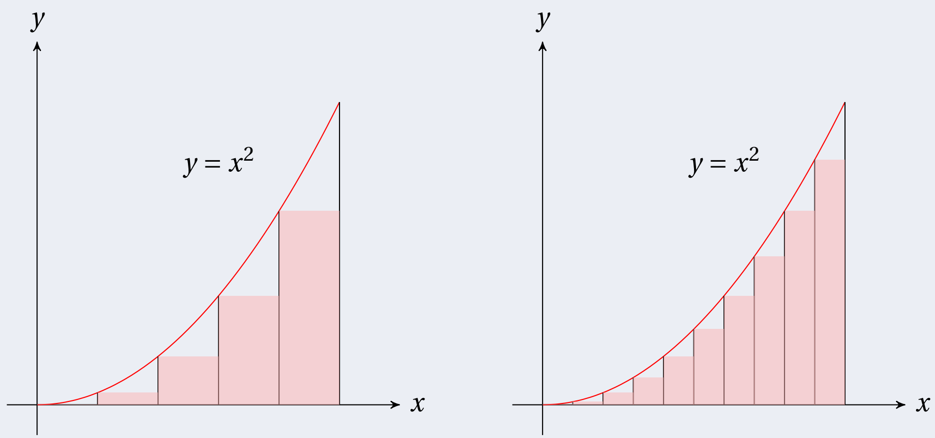
- Relation de Chasles : $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x$
- Anti-symétrie : $\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$
- Comparaison :

  Si $g \geqslant f$ sur $[a;b]$ alors $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Remarque La relation de Chasles nous permet donc de gérer le cas des fonctions de signe quelconque. Il suffit de découper le domaine de définition de f selon qu'elle soit positive ou négative est de sommer les aires algébriques associées.

Méthode | Approche de l'intégrale par la méthode des rectangles

On peut approcher l'intégrale d'une fonction f en utilisant l'aire de rectangles sous la courbe de f. Ci-contre, la courbe de la fonction carré sur $[0;1]$.



En augmentant le nombre de rectangles, on approche de la valeur de l'aire.

Exercice

Déterminer les intégrales suivantes en se ramenant à des calculs d'aires relatives.

1. $\int_0^{10} 2x-4\mathrm{d}x$

2. $\int_{-1}^{1} x\mathrm{d}x$

3. $\int_{-3}^{3} x^3\mathrm{d}x$

4. $\int_4^7 3x+1\mathrm{d}x$

Propriété | Linéarité

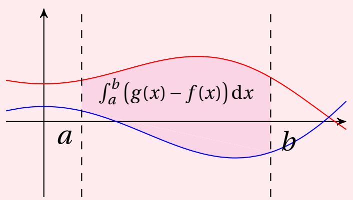
Soient f et g définies sur $[a;b]$ ainsi que k un réel.

- $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\mathrm{d}x$
- $k \times \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b kf(x)\mathrm{d}x$

2 Intégration plus avancée

Propriété | Aire entre deux courbes

Soient f et g deux fonctions continues définies sur le même intervalle $[a;b]$ telles que $g \geqslant f$.
L'aire absolue entre les courbes de f et g ainsi que $x=a$ et $x=b$ correspond à l'intégrale $\int_a^b \big(g(x)-f(x)\big)\mathrm{d}x$.



Définition | Valeur moyenne

On appelle **valeur moyenne** de f entre a et b le nombre $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Remarque C'est une extension de la moyenne algébrique $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ pour une série $x_1, \cdots, x_n$.

Théorème | Théorème fondamental de l'analyse

Toute fonction f continue sur un intervalle I admet une unique primitive s'annulant en $a \in I$. On la note F_a et on a :

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$$

Démonstration. Admise. □

Théorème | Calcul primitif

Soit F une primitive de f sur $[a;b]$.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = \big[F(x)\big]_a^b$$

Remarque Il est désormais extrêmement facile de calculer une intégrale pour des fonctions usuelles.

Exemples

- $\int_2^7 x+4\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}+4x\right]_2^7 = \left(\frac{7^2}{2}+4\times 7\right) - \left(\frac{2^2}{2}+4\times 2\right) = 42{,}5.$
- $\int_{-1}^{3} \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = \left[\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\right]_{-1}^{3} = \left(\frac{\mathrm{e}^{2\times 3}}{2}\right) - \left(\frac{\mathrm{e}^{2\times(-1)}}{2}\right) = \frac{\mathrm{e}^6}{2} - \frac{\mathrm{e}^{-2}}{2}.$