TP1

BINAIRE ET HEXADÉCIMAL

Définition

Un **système de numération** est un ensemble de symboles qui sont assemblés en suivant des règles d'écriture précises permettant d'écrire, de lire et d'énoncer des nombres.

Dans l'Histoire, des dizaines de systèmes de numération ont été inventés pour répondre à différents besoins. Il existe des systèmes de numération additive tels que les chiffres romains et des systèmes de position comme la numération décimale (base 10) quon utilise dans la vie de tous les jours. Depuis lavènement des circuits électroniques et de linformatique, les systèmes binaires (base 2) et hexadécimaux (base 16), qui sont également des systèmes de position, sont devenus indispensables. Mais, au juste, qu'est-ce qu'une base?

Définition

Une **base**, dans un système de numération positionnel, est le nombre de symboles qui sont utilisés pour représenter les nombres.

Exemples En base 10 (la numération décimale), on utilise 10 chiffres, soit de 0 à 9, tandis qu'en base 2 (la numération binaire), on n'utilise que 2 chiffres, c'est-à-dire le zéro (0) et le un (1).

La base de référence dans tout le TP sera évidemment la base décimale ainsi, on notera par la suite, les bases utilisées via un indice. Par exemple, le nombre 172 dans la base 10 sera noté 172_{10} mais ne sera pas égal au nombre 172 dans la base 8 noté 172_8.

Méthode

En numération décimale, un nombre est décomposé en puissances de 10.
Par exemple, le nombre 67_{10} est égal à $\mathbf{6}\times10^1+\mathbf{7}\times10^0$.
De même :

- $4\,591_{10}=4\times10^3+5\times10^2+9\times10^1+1\times10^0$
- $100_{10}=1\times10^2+0\times10^1+0\times10^0$
- $90\,660_{10}=9\times10^4+0\times10^3+6\times10^2+6\times10^1+0\times10^0$

1 Écriture d'un nombre en binaire

Exemples Donnons quelques nombres en base 2 :

- $4_{10}=100_2$ car $4_{10}=1\times2^2+0\times2^1+0\times2^0$
- $10_{10}=1010_2$ car $10_{10}=1\times2^3+0\times2^2+1\times2^1+0\times2^0$
- $4_{10}=100_2$ car $4_{10}=1\times2^2+0\times2^1+0\times2^0$

Définitions

- Les chiffres utilisés pour écrire un nombre en binaire (base 2) sont appelés des **bits** (pour binary digits).
- Un groupe de 8 bits est appelé **octet**.

Exercice 1

Donner dans un tableau tous les nombres de 0 à 16 en base 2.

Exercice 2

Convertir en base 2 les nombres suivants.

- 33
- 290
- 777
- 45
- 1320

Exercice 3

Convertir 1000010_2, 1101_2, 1010101_2 et 1001101_2 en base 10.

Méthode | Algorithme de conversion binaire - décimal

Pour des grands nombres, il est intéressant de savoir convertir algorithmiquement en base 2. Un des algorithmes est la méthode des divisions euclidiennes successives par 2 :

- On a notre nombre en décimal.
- On le divise par 2 et on note le reste de la division (c'est soit un 1 soit un 0).
- On refait la même chose avec le quotient précédent, et on met de nouveau le reste de coté.
- On réitère la division, et ce jusqu'à ce que le quotient est 0.
- Le nombre en binaire apparaît : le premier à placer est le dernier reste non nul. Ensuite, on remonte en plaçant les restes que l'on avait. On les place à droite du premier 1.

Pour 164 :

$164 \div 2 = 82 + 0$
$82 \div 2 = 41 + 0$
$41 \div 2 = 20 + 1$
$20 \div 2 = 10 + 0$
$10 \div 2 = 5 + 0$
$5 \div 2 = 2 + 1$
$2 \div 2 = 1 + 0$
$1 \div 2 = 0 + 1$

En lisant de bas en haut, on obtient $164_{10} = 10100100_2$

Exercice 4

Convertir les nombres suivants en base 2.

- 1 234
- 7 462
- 897
- 392 629

Exercice 5

Convertir 1010101_{10} en base 2.

Exercice 6

Tous les nombres de l'exercice seront en base 2.
Réaliser les opérations suivantes en les posant.

- $0110 + 0011$
- 0101×0010
- $1011 + 0110$
- 1101×0111
- $10110011 + 00101101$
- 0101×1011
- $010100101010 + 001111011000$
- 00010101×00111100

2 Écriture d'un nombre en hexadécimal

Définition

En base 16 ou base **hexadécimale**, on utilise les symboles 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E et F.

Exemples Nous avons donc en base hexadécimal, les correspondances suivantes :

- $164_{10} = A4_{16}$ car $164 = 10 \times 16 + 4$;
- $84_{10} = 54_{16}$ car $84 = 5 \times 16 + 4$;
- $01110000 = 70_{16}$.

Exercice 7

Convertir les nombres suivants en base décimale.

- 0012_{16}
- $BC00_{16}$
- $ABCD_{16}$

Remarques
- Pour convertir un nombre de la base décimale vers hexadécimale, il suffit à nouveau d'effectuer des divisions euclidiennes par 16 en reprenant le quotient obtenu jusqu'à ce qu'il soit nul. Les restes seront lus par la fin pour donner l'écriture hexadécimale.

- Pour convertir un nombre du binaire vers la base hexadécimale, c'est beaucoup plus rapide : on remplace chaque groupe de 4 bits par la notation hexadécimale correspondante.

  Ainsi, $1011\,0011_{\mathbf{2}} = B3_{\mathbf{16}}$.

Exercice 8

Convertir les nombres suivants en base hexadécimale.

- $495_{\mathbf{10}}$
- $32\,569_{\mathbf{10}}$
- $986\,569\,098_{\mathbf{10}}$
- $0010\,1011_{\mathbf{2}}$
- $1000\,1100_{\mathbf{2}}$
- $1100\,0101\,1110\,1101_{\mathbf{2}}$
- $1\,010\,101_{\mathbf{10}}$

Exercice 9

Tous les nombres de l'exercice seront en base 16.
Réaliser les opérations suivantes en les posant.

- $45 + 12$
- $23 + AB$
- $A5C1 + 90EE$
- $56D3 + C8F2$