DEVOIR SURVEILLÉ 1

Calculatrice interdite

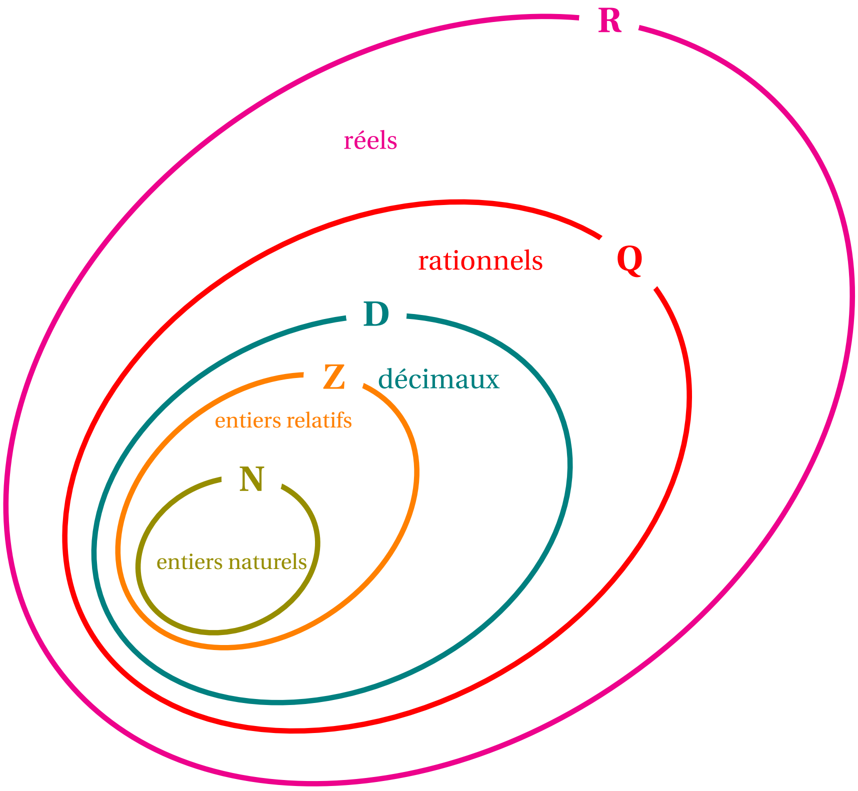
Mardi 23 septembre 2025

EXERCICE 1 (10 POINTS)

1. Donner la définition d'un nombre rationnel.

Un nombre est dit rationnel s'il peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ avec a et $b \neq 0$ des entiers relatifs.

2. Indiquer la notation (la lettre) des ensembles de nombres dans le diagramme suivant.



3. Compléter le tableau suivant avec $\in$ ou $\notin$.

	D	Z	R	N	Q
$-\sqrt{121}$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$
$\frac{1}{3}$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$
$\sqrt{2}$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$
$\frac{4}{25}$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$
5π	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$
$2{,}4 \times 10^2$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$

4. Si elle existe, donner une écriture décimale de chacun des nombres suivants.

a. $A=\dfrac{3}{15}-\dfrac{1}{5}\times\dfrac{2}{10}$

b. $B=-2,62\times10^{-3}$

c. $C=\dfrac{\sqrt{6}}{4}\times\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

$$\begin{aligned}A&=\frac{3}{15}-\frac{1}{5}\times\frac{2}{10}\\&=\frac{3}{15}-\frac{2}{50}\\&=\frac{30}{150}-\frac{6}{150}\\&=\frac{24}{150}\\&=\frac{8}{50}\\&=\frac{16}{100}\\&=0{,}16\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B&=-2,62\times10^{-3}\\&=-0{,}002\,62\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C&=\frac{\sqrt{6}}{4}\times\frac{\sqrt{6}}{2}\\&=\frac{6}{8}\\&=\frac{3}{4}\\&=0{,}75\end{aligned}$$

Exercice 2 (10 points)

1. Écrire les nombres suivants sous forme de fraction irréductible.

a. $\dfrac{9}{20}-\dfrac{7}{10}$

b. $\dfrac{7}{12}\times\dfrac{36}{35}$

2. Écrire les nombres proposés sous la forme a^n où a est le plus petit entier possible.

a. $\dfrac{2^7\times8}{2^{-4}}$

b. $\dfrac{125^3\times5}{25^2}$

3. Écrire les nombres proposés sous la forme $a\sqrt{b}$ où a est un entier et b le plus petit entier possible.

a. $\sqrt{450}$

b. $-4\sqrt{32}$

4. Un jardin est aménagé selon les proportions suivantes : $\dfrac{1}{5}$ par la culture des légumes, $\dfrac{13}{50}$ par la culture des plantes aromatiques, $\dfrac{3}{10}$ par une serre servant aux semis et le reste par la culture des fraisiers.
Quelle est la culture qui occupe le plus de surface ?

Correction

1. Réduire sous forme de fraction irréductible :

a.

$$\frac{9}{20}-\frac{7}{10}=\frac{9}{20}-\frac{14}{20}=\frac{-5}{20}=-\frac{1}{4}.$$

b.

$$\frac{7}{12}\times\frac{36}{35}=\frac{7\times36}{12\times35}=\frac{252}{420}=\frac{3}{5}.$$

2. Écrire sous la forme a^n :

a.

$$\frac{2^7\times8}{2^{-4}}=\frac{2^7\times2^3}{2^{-4}}=\frac{2^{10}}{2^{-4}}=2^{14}.$$

b.

$$\frac{125^3\times5}{25^2}=\frac{(5^3)^3\times5}{(5^2)^2}=\frac{5^9\times5}{5^4}=\frac{5^{10}}{5^4}=5^6.$$

3. Réécrire sous la forme $a\sqrt{b}$:

a.

$$\sqrt{450}=\sqrt{9\times 50}=3\sqrt{50}=3\sqrt{25\times 2}=15\sqrt{2}.$$

b.

$$-4\sqrt{32}=-4\sqrt{16\times 2}=-4\times 4\sqrt{2}=-16\sqrt{2}.$$

4. Répartition des surfaces du jardin :

$$\frac{1}{5}=\frac{10}{50},\quad \frac{13}{50},\quad \frac{3}{10}=\frac{15}{50}.$$

Total utilisé : $\frac{10}{50}+\frac{13}{50}+\frac{15}{50}=\frac{38}{50}$. Il reste $\frac{12}{50}=\frac{6}{25}$ pour les fraisiers.
Comparaison :

$$\frac{10}{50}=0,20,\quad \frac{13}{50}=0,26,\quad \frac{15}{50}=0,30,\quad \frac{12}{50}=0,24.$$

La culture qui occupe le plus de surface est donc la **serre pour les semis**.

Bonus (Kangourou Cadets 2007) : Combien de nombres entiers à deux chiffres sont tels que le carré de la somme de leurs chiffres soit égal à la somme des chiffres de leur carré ?

Correction

On cherche les nombres à deux chiffres dont le carré de la somme des chiffres est égal à la somme des chiffres de leur carré.
Soit un nombre $n=10a+b$ avec $1\leqslant a\leqslant 9$ et $0\leqslant b\leqslant 9$.

- La somme de ses chiffres est $a+b$.
- Le carré de cette somme est $(a+b)^2$.
- Le carré du nombre est n^2.
- La somme des chiffres de n^2 est notée $S(n^2)$.

On cherche les n tels que $(a+b)^2=S(n^2)$.

1) Limitation de la somme des chiffres. Comme $n\leqslant 99$, on a $n^2\leqslant 9801$ et donc $S(n^2)\leqslant 9+8+0+1=18$.
Ainsi $(a+b)^2\leqslant 18 \quad\Rightarrow\quad a+b\leqslant 4$.
On teste donc les cas $a+b=1,2,3,4$.

2) Cas $a+b=1$. Nombre : 10. $10^2=100$, somme des chiffres $=1$. Or $(1)^2=1$. ✓

3) Cas $a+b=2$. Nombres : $11,20$.

$$11^2=121,\ S=4,\quad (2)^2=4.\checkmark\qquad 20^2=400,\ S=4,\quad (2)^2=4.\checkmark$$

4) Cas $a+b=3$. Nombres : $12,21,30$.

$$12^2=144,\ S=9,\quad (3)^2=9.\checkmark$$
$$21^2=441,\ S=9,\quad (3)^2=9.\checkmark$$
$$30^2=900,\ S=9,\quad (3)^2=9.\checkmark$$

5) Cas $a+b=4$. Nombres : $13,22,31,40$.

$$13^2=169,\ S=16,\quad (4)^2=16.\checkmark$$
$$22^2=484,\ S=16,\quad (4)^2=16.\checkmark$$
$$31^2=961,\ S=16,\quad (4)^2=16.\checkmark$$
$$40^2=1600,\ S=7,\quad (4)^2=16.\ \times$$

Conclusion : les nombres qui conviennent sont :

$$10,\ 11,\ 20,\ 12,\ 21,\ 30,\ 13,\ 22,\ 31.$$

Il y en a donc **9 en tout**.